

ИНДИВИДУАЛЬНЫЙ ПРЕДПРИНИМАТЕЛЬ
ДАНИЕЛОВА АЛИСА ВЛАДИМЕРОВНА



Утверждаю

Индивидуальный предприниматель

/ Даниелова А. В.

Приказ № 1а от «1» сентября 2026 г.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА -
ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ОБЩЕРАЗВИВАЮЩАЯ ПРОГРАММА
технической направленности
«Подготовка к ЕГЭ по математике: профильный уровень»

Срок реализации программы: 13 недель (74 ак. ч.)

Возрастная категория: 16-17 лет

Состав группы: до 6 человек

Форма обучения: очная

г. Москва, 2026 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1. КОМПЛЕКС ОСНОВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОБРАЗОВАНИЯ: ОБЪЕМ, СОДЕРЖАНИЕ, ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ	2
1.1 Пояснительная записка	2
1.2 Цель и задачи программы	3
1.3 Учебный план	5
1.4 Планируемые результаты	6
2. КОМПЛЕКС ОРГАНИЗАЦИОННО-ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ, ВКЛЮЧАЮЩИЙ ФОРМЫ АТТЕСТАЦИИ	7
2.1 Календарный учебный график	7
2.2 Условия реализации программы	7
2.3 Формы аттестации	8
2.4 Методические материалы	11
2.5 Оценочные материалы	16
2.6 Список литературы	23
3. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА МОДУЛЯ 1	24
4. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА МОДУЛЯ 2	32
5. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА МОДУЛЯ 3	40
6. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА МОДУЛЯ 4	54
7. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА МОДУЛЯ 5	66
8. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА МОДУЛЯ 6	78

1. КОМПЛЕКС ОСНОВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОБРАЗОВАНИЯ: ОБЪЕМ, СОДЕРЖАНИЕ, ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1.1 Пояснительная записка

Дополнительная общеобразовательная программа - дополнительная общеразвивающая программа «Подготовка к ЕГЭ по математике: профильный уровень» (далее - Программа) разработана на основе следующих нормативных правовых документов:

1. Федеральный закон Российской Федерации от 29.12.2012 г. № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации».
2. Постановление Главного государственного санитарного врача Российской Федерации от 28.09.2020 №28 «Об утверждении санитарных правил СП 2.4.3648-20 «Санитарно-эпидемиологические требования к организациям воспитания и обучения, отдыха и оздоровления детей и молодежи».
3. Приказ Министерства Просвещения РФ от 27 июля 2022 г. №629 «Об утверждении Порядка организации и осуществления образовательной деятельности по ДОП».
4. Приказ Министерства труда и социальной защиты Российской Федерации от 22 сентября 2021 года №652н «Об утверждении профессионального стандарта «Педагог дополнительного образования детей и взрослых».

Единый государственный экзамен по математике профильного уровня является экзаменом по выбору и необходим для поступления в технические, экономические и естественно-научные вузы. В отличие от базового уровня, профильный экзамен проверяет глубокое понимание математических законов, умение решать сложные и комбинированные задачи, а также способность применять математический аппарат в нестандартных ситуациях. В 2026 году экзаменационная работа профильного уровня состоит из двух частей: часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом (№ 1-12), часть 2 - 7 заданий с развёрнутым ответом (№ 13-19). На выполнение отводится 235 минут. Для получения высокого балла необходимо уверенное владение всеми разделами школьного курса: алгеброй, геометрией, началами математического анализа, теорией вероятностей и статистикой, а также навыками решения текстовых, экономических и логических задач. Программа адресована обучающимся 10-11 классов, желающим систематизировать знания по математике и подготовиться к сдаче ЕГЭ профильного уровня для поступления в вузы. Программа построена с учётом актуальных требований Федерального института педагогических измерений (ФИПИ) и отражает все элементы содержания, включённые в кодификатор 2026 года. Она полностью покрывает все типы заданий, встречающиеся в демоварианте и открытом банке: от простейших вычислений и геометрических задач до сложных уравнений с параметрами, стереометрических доказательств и экономических оптимизаций.

Программа реализуется в очной форме, что обеспечивает непосредственное взаимодействие обучающихся с педагогом, оперативную обратную связь и максимальную эффективность учебного процесса. Занятия проводятся в специально

оборудованном классе: педагог в живом диалоге даёт теоретические основы и разбор типовых заданий, используя маркерную доску, наглядные пособия и проекционный материал, а обучающиеся закрепляют знания, выполняя практические задания в рабочих тетрадях, решая задачи у доски и участвуя в коллективных обсуждениях. Отличительной особенностью программы является её практико-ориентированный характер. Каждое теоретическое знание немедленно подкрепляется решением конкретного задания в формате ЕГЭ - тренировка на актуальных прототипах из открытого банка заданий ФИПИ, выполнение диагностических и тренировочных работ с последующей проверкой педагогом. Такой подход обеспечивает осмысленное усвоение материала, высокую мотивацию и возможность своевременной коррекции ошибок.

Структура программы выстроена по модульному принципу с возрастающей сложностью. Первый модуль посвящён базовым алгебраическим преобразованиям (степени, корни, логарифмы, тригонометрические формулы) - фундаменту для всех последующих разделов. Второй модуль охватывает все виды уравнений и неравенств (рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические, смешанные) и их системы. Третий модуль систематизирует знания о функциях, их графиках и применении производной для исследования и оптимизации. Четвёртый и пятый модули посвящены планиметрии и стереометрии соответственно - здесь отрабатываются как вычислительные, так и доказательные задачи, включая координатно-векторный метод. Шестой модуль объединяет текстовые задачи (движение, работа, проценты, экономика), теорию вероятностей и математическую статистику, задачи с параметрами и комбинаторно-логические задания. Такая структура обеспечивает полное покрытие всех тем ЕГЭ и позволяет обучающемуся последовательно наращивать уровень сложности.

Направленность программы: техническая.

Адресат программы: лица 16-17 лет (обучающиеся 10-11 классов), желающие освоить и систематизировать знания по математике для успешной сдачи ЕГЭ профильного уровня, поступления в вузы и уверенного применения математических навыков в будущей профессиональной деятельности.

Продолжительность академического часа составляет 45 минут.

Нормативный срок обучения - 74 ак. часа.

Продолжительность обучения - 13 недель.

Форма обучения - очная.

Режим занятий: согласно календарному учебному графику.

Язык реализации программы: русский.

1.2 Цель и задачи программы

Цель программы: формирование у обучающихся системных знаний и устойчивых навыков по всем разделам математики, включённым в ЕГЭ профильного уровня (алгебра, геометрия, начала математического анализа,

теория вероятностей, комбинаторика), а также умений решать задания различных типов (с кратким и развёрнутым ответом), включая задачи с параметрами и нестандартные логические задачи; подготовка к осознанному и успешному прохождению государственной итоговой аттестации и применению математических знаний в дальнейшем образовании и профессиональной деятельности.

Задачи программы:

1. Познакомить обучающихся со структурой КИМ ЕГЭ по математике профильного уровня, системой оценивания, критериями выставления баллов за задания с развёрнутым ответом (№ 13-19), правилами заполнения бланков и стратегиями распределения времени.
2. Обеспечить глубокое понимание и свободное владение алгебраическими преобразованиями: действия со степенями, корнями, логарифмами, тригонометрическими выражениями; упрощение рациональных, иррациональных, показательных, логарифмических и тригонометрических выражений (задание № 7 и подготовка к другим заданиям, требующим преобразований).
3. Сформировать умение решать уравнения и неравенства всех типов, изучаемых в школьном курсе (рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические, смешанные), а также их системы, с обязательным учётом ОДЗ и проверкой корней (задания № 6, 13, 15).
4. Систематизировать знания о свойствах элементарных функций (линейной, квадратичной, степенной, показательной, логарифмической, тригонометрических), их графиках и преобразованиях; научить читать графики, определять параметры функций по графикам и решать графически уравнения и неравенства (задания № 8, 11, 12, 18).
5. Обучить применению производной для исследования функций: нахождение экстремумов, промежутков монотонности, наибольших и наименьших значений; решение задач на оптимизацию, в том числе с использованием геометрических и экономических моделей (задания № 8, 12, 16).
6. Сформировать навыки решения планиметрических задач: свойства треугольников, четырёхугольников, окружностей (вписанных, описанных), вычисление углов, длин, площадей; доказательные задачи с использованием теорем (синусов, косинусов, о вписанных углах, касательных и хорд) - задания № 1, 2, 17.
7. Обучить методам решения стереометрических задач: нахождение объёмов и площадей поверхностей многогранников и тел вращения, построение сечений, вычисление расстояний и углов между прямыми и плоскостями; применение координатного и векторного методов (задания № 3, 14).

8. Научить решать текстовые задачи (на движение, работу, проценты, смеси, сплавы, экономические задачи - кредиты, оптимизация) с помощью составления уравнений, неравенств и систем (задания № 9, 10, 16).
9. Сформировать представление о теории вероятностей и статистике: классическая вероятность, геометрическая вероятность, операции над событиями, математическое ожидание дискретной случайной величины; уметь решать задачи на нахождение вероятностей и ожидаемых значений (задания № 4, 5).
10. Развить навыки решения задач с параметрами (алгебраические и графические методы) и комбинаторных задач, в том числе нестандартных, требующих логического анализа и перебора вариантов (задания № 18, 19).
11. Воспитывать ответственное отношение к итоговой государственной аттестации, понимание важности систематической подготовки, соблюдения правил проведения экзамена и честности при выполнении работы; развивать самодисциплину, умение организовать собственное учебное время, выявлять и устранять пробелы в знаниях.
12. Стимулировать интерес к дальнейшему самообразованию в области точных наук, развитию логического и алгоритмического мышления, осознанному отношению к собственной образовательной траектории и умению применять математические знания в практических ситуациях (моделирование реальных процессов, интерпретация данных, финансовые и естественно-научные вычисления).

1.3 Учебный план

Наименование модуля		Всего	В том числе		Формы контроля и аттестации
			теория	практика	
Учебный кабинет	Модуль 1. Алгебраические преобразования	12	5	7	Текущий контроль, промежуточная аттестация
Учебный кабинет	Модуль 2. Уравнения и неравенства	14	6	8	Текущий контроль, промежуточная аттестация
Учебный кабинет	Модуль 3. Функции, графики, производная	14	6	8	Текущий контроль, промежуточная аттестация
Учебный кабинет	Модуль 4. Планиметрия	14	6	8	Текущий контроль, промежуточная аттестация

Учебный кабинет	Модуль 5. Стереометрия	14	6	8	Текущий контроль, промежуточная аттестация
Учебный кабинет	Модуль 6. Текстовые задачи, вероятность, параметры, комбинаторика	6	2	4	Текущий контроль, промежуточная аттестация
	Итого:	74	31	43	

1.4 Планируемые результаты

Обучающийся будет знать:

- Структуру и содержание КИМ ЕГЭ по математике профильного уровня (часть 1 - 12 заданий с кратким ответом, часть 2 - 7 заданий с развёрнутым ответом, всего 19 заданий), систему оценивания, правила заполнения бланков и стратегии распределения времени.
- Определения и свойства элементарных функций (линейной, квадратичной, степенной, показательной, логарифмической, тригонометрических), их графики и основные характеристики.
- Виды преобразований графиков: параллельный перенос, растяжение, сжатие, симметрия, модульные преобразования.
- Свойства степеней, корней и логарифмов, основное логарифмическое тождество, формулы перехода к новому основанию.
- Основные тригонометрические тождества, формулы приведения, сложения, двойного угла, преобразования суммы в произведение.
- Методы решения рациональных, иррациональных, показательных, логарифмических, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем, включая учёт ОДЗ и отбор корней.
- Основные теоремы и формулы планиметрии (треугольники, четырёхугольники, окружности, векторы) и стереометрии (объёмы, площади поверхностей, сечения, координатно-векторный метод).
- Элементы теории вероятностей, математического ожидания, комбинаторики, алгоритмы решения текстовых и экономических задач, методы решения задач с параметрами.

Обучающийся будет уметь:

- Определять свойства функции по её графику, строить графики с помощью преобразований, находить параметры функций по графику.
- Преобразовывать алгебраические выражения, содержащие степени, корни, логарифмы и тригонометрические функции.
- Решать уравнения и неравенства всех типов, включая комбинированные и системы, проверять корни по ОДЗ и отбирать корни на промежутке.

- Применять производную для исследования функций (экстремумы, монотонность, наибольшие и наименьшие значения) и решения оптимизационных задач.
- Решать планиметрические и стереометрические задачи на вычисление и доказательство, использовать координатно-векторный метод.
- Решать текстовые задачи (движение, работа, проценты, экономика) и задачи на вероятности, математическое ожидание и комбинаторику.
- Находить все значения параметра, при которых уравнение или система имеет заданное число решений, используя аналитические и графические методы.
- Правильно оформлять решения заданий с развёрнутым ответом, обосновывая каждый шаг, и оценивать собственный уровень готовности к экзамену.

2. КОМПЛЕКС ОРГАНИЗАЦИОННО-ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ, ВКЛЮЧАЮЩИЙ ФОРМЫ АТТЕСТАЦИИ

2.1 Календарный учебный график

Наименование модуля		Всего	В том числе		Учебная неделя, день недели
			теория	практика	
Учебный кабинет	Модуль 1. Алгебраические преобразования	12	5	7	1-2, понедельник, среда, пятница
Учебный кабинет	Модуль 2. Уравнения и неравенства	14	6	8	3-5, понедельник, среда, пятница
Учебный кабинет	Модуль 3. Функции, графики, производная	14	6	8	5-7, понедельник, среда, пятница
Учебный кабинет	Модуль 4. Планиметрия	14	6	8	7-9, понедельник, среда, пятница
Учебный кабинет	Модуль 5. Стереометрия	14	6	8	10-12, понедельник, среда, пятница
Учебный кабинет	Модуль 6. Текстовые задачи, вероятность, параметры, комбинаторика	6	2	4	12-13, понедельник, среда, пятница
Итого:		74	31	43	

2.2 Условия реализации программы

ИП Даниелова А. В. располагает материально-технической базой, обеспечивающей реализацию образовательной программы и соответствующей действующим санитарным и противопожарным правилам и нормам.

Материально-техническое обеспечение:

- Стол ученический - 6 шт.

- Стул ученический - 6 шт.
- Стол учительский - 1 шт.
- Стул учительский - 1 шт.
- Доска магнитно-маркерная - 2 шт.
- Шкаф для хранения учебных пособий - 1 шт.
- Шкаф для хранения личных вещей - 1 шт.
- Ноутбук - 2 шт.
- Проектор переносной - 1 шт.
- Экран переносной - 1 шт.
- Динамики для громкого воспроизведения - 1 шт.

Кадровое обеспечение реализации программы

Реализация программы обеспечивается педагогами дополнительного образования. Педагоги ИП Даниелова А. В. имеют высшее и (или) среднее профессиональное образование по направлению подготовки «Образование и педагогические науки», соответствуют требованиям профессионального стандарта «Педагог дополнительного образования детей и взрослых» (утвержден приказом Министерства труда и социальной защиты Российской Федерации от 22.09.2021 № 652н), без предъявления требований к стажу работы. Педагоги успешно проходят программы повышения квалификации по сфере деятельности, соответствующей направленности Программы.

2.3 Формы аттестации

Оценка достижения планируемых результатов освоения Программы представляет собой единую систему, основанную на принципах объективности, систематичности и учёта индивидуальных и возрастных особенностей обучающихся. Она реализуется через два взаимосвязанных компонента: текущий контроль успеваемости и промежуточную аттестацию.

Текущий контроль – это систематическая проверка учебных достижений, проводимая педагогом непосредственно в ходе образовательной деятельности в соответствии с Программой. Ключевая задача текущего контроля – обеспечить мониторинг уровня и качества освоения тем Программы для своевременной коррекции процесса обучения. Текущий контроль осуществляется по итогам каждой пройденной темы (каждого урока).

Функции текущего контроля:

1. диагностическая: определение фактического уровня теоретических знаний (виды элементарных функций, их свойства и графики; правила преобразования графиков; определение логарифма и его свойства; методы решения показательных, логарифмических и тригонометрических уравнений и неравенств; формулы тригонометрии) и практических умений (построение и чтение графиков, выполнение преобразований, решение уравнений и неравенств в формате ЕГЭ, работа с параметрами, заполнение бланков ответов, анализ собственных результатов);

2. коррекционная: своевременное выявление и устранение пробелов в усвоении материала (например, ошибки в применении свойств логарифмов, неверное определение знака коэффициента при чтении графика, потеря корней при решении тригонометрических уравнений);
3. стимулирующая: мотивация обучающихся к систематической работе, поддержание познавательного интереса через решение задач повышенной сложности и заданий с параметрами.

Текущий контроль осуществляется в форме выполнения практических заданий, предусмотренных содержанием каждой темы:

- решение заданий в формате ЕГЭ профильного уровня (№ 6, № 9, № 11, № 12, № 14, № 15, № 17, № 18) – нахождение параметров функций по графику, определение свойств, построение графиков с преобразованиями, решение показательных, логарифмических и тригонометрических уравнений и неравенств; все работы проверяются педагогом с разбором типичных ошибок;
- заполнение пропусков в алгоритмах решения уравнений (например, восстановление шагов при потенцировании, замене переменной, отборе корней) с последующей коллективной проверкой и обсуждением;
- работа с таблицами свойств функций, схемами преобразований графиков;
- составление алгоритмов решения типовых задач (например, алгоритм решения логарифмического уравнения с учётом ОДЗ, алгоритм построения графика с модулем);
- выполнение тестовых заданий в формате ЕГЭ на бумажных носителях с проверкой педагогом непосредственно на занятии;
- заполнение бланков ответов ЕГЭ (краткий ответ и развёрнутое решение) с последующей проверкой правильности оформления;
- анализ собственных ошибок с фиксацией в индивидуальном портфолио и составление плана их устранения под руководством педагога.

Промежуточная аттестация – это оценка качества усвоения обучающимися содержания Программы, которая направлена на комплексную проверку достижения всех заявленных целей программы и выявление связей между её элементами. Промежуточная аттестация проводится по завершении каждого модуля (Модуль 1 – после 5-го урока, Модуль 2 – после 7-го урока). Понятие промежуточной аттестации закреплено в п. 22 ст. 2 Федерального закона № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации».

Функции промежуточной аттестации:

1. контрольно-оценочная: выявление уровня сформированности знаний, умений и представлений обучающихся, их соответствия планируемым результатам программы (например, умение строить графики с преобразованиями, решать логарифмические уравнения с параметром, применять тригонометрические формулы);

2. аналитическая: анализ полноты реализации программы, соотнесение прогнозируемых и реальных результатов, выявление тем, требующих дополнительного повторения;
3. развивающая: помощь обучающимся в осознании достигнутого уровня знаний и в определении дальнейших перспектив (например, выбор стратегии подготовки к ЕГЭ, планирование повторения сложных разделов).

Промежуточная аттестация осуществляется в форме письменного теста в формате ЕГЭ (задания по темам модуля) и творческого (проектного) задания.

Письменный тест включает задания с кратким ответом (аналогичные № 6, № 9, № 11, № 12, № 14, № 15) и задания с развёрнутым ответом (№ 17, № 18), соответствующие изученному материалу. Для Модуля 1 тест содержит задачи на чтение графиков, определение параметров функций, построение графиков с преобразованиями, решение уравнений и неравенств графическим методом. Для Модуля 2 – задачи на преобразование логарифмических и показательных выражений, решение логарифмических, показательных и тригонометрических уравнений и неравенств, а также прикладные задачи с использованием логарифмов. Все тесты выполняются в аудитории, проверяются педагогом и обсуждаются с каждым обучающимся индивидуально.

Творческое (проектное) задание позволяет обучающемуся продемонстрировать умение применять полученные знания в практико-ориентированной деятельности. Примеры заданий:

- разработка индивидуальной стратегии подготовки к заданиям ЕГЭ по темам модуля (например, план повторения свойств логарифмов и методов решения уравнений);
- составление алгоритма решения задачи высокого уровня сложности (например, уравнения с параметром, содержащего логарифмы и тригонометрию);
- создание памятки «Как читать графики функций» или «Шпаргалка по преобразованиям графиков» с примерами;
- разработка плана повторения тем с указанием типичных ошибок и способов их предотвращения;
- построение семейства графиков функций с подробным описанием каждого этапа преобразований.

Творческие задания выполняются как в аудитории, так и в качестве домашней работы с последующей защитой (устным комментарием) перед педагогом и группой.

Оценивание осуществляется по системе «зачтено / не зачтено» на основании разработанных критериев, которые включают:

- полноту выполнения задания (все этапы решения, учёт ОДЗ, проверка корней);
- точность и обоснованность каждого шага (ссылки на свойства функций, формулы, теоремы);
- самостоятельность выполнения (отсутствие помощи педагога при решении);

- практическую значимость выполненной работы (например, пригодность памятки для использования на экзамене).

Результаты промежуточной аттестации фиксируются в электронном журнале и доводятся до сведения обучающихся и родителей (законных представителей). При получении оценки «не зачтено» обучающийся имеет право на повторное выполнение работы после дополнительных консультаций в рамках учебного кабинета.

2.4 Методические материалы

Методические материалы программы разработаны с учётом особенностей обучающихся (10-11 классы), принципов доступности, практико-ориентированного обучения, а также требований к реализации программ дополнительного образования естественно-научной направленности.

Основу образовательных ресурсов составляют:

- Теоретический материал - как источник структурированной информации по основным разделам математики профильного уровня, охваченным программой: свойства элементарных функций (линейной, квадратичной, степенной, показательной, логарифмической, тригонометрических), их графики и основные характеристики (область определения, множество значений, нули, промежутки монотонности, экстремумы, асимптоты); правила преобразования графиков (параллельный перенос, растяжение и сжатие, симметрия, модульные преобразования); определение логарифма, основное логарифмическое тождество и свойства логарифмов; методы решения показательных, логарифмических и тригонометрических уравнений и неравенств; тригонометрические формулы (основные тождества, формулы приведения, сложения, двойного угла, преобразования суммы в произведение); алгоритмы решения задач с параметрами, связанных с графиками функций; основные теоремы планиметрии (треугольники, четырёхугольники, окружности, векторы) и стереометрии (многогранники, тела вращения, сечения, координатно-векторный метод); элементы теории вероятностей и комбинаторики; методы решения текстовых и экономических задач.
- Практические задания - для формирования навыков решения заданий в формате ЕГЭ профильного уровня: построение и чтение графиков функций с преобразованиями; нахождение параметров функций по графику; решение показательных, логарифмических и тригонометрических уравнений и неравенств (включая задания с параметрами и задания, требующие отбора корней); преобразование логарифмических и показательных выражений; решение прикладных задач с использованием логарифмов; решение планиметрических и стереометрических задач на вычисление и доказательство; решение текстовых задач на движение, работу, проценты, экономические задачи; задачи на вероятность и математическое ожидание; задачи с параметрами и комбинаторно-логические задачи; работа с учебными таблицами и схемами (например, таблица

свойств логарифмов, классификация методов решения уравнений, формулы планиметрии и стереометрии); составление алгоритмов решения типовых задач; выполнение тренировочных вариантов с ограничением времени; заполнение бланков ответов.

Программа использует следующие педагогические методы, соответствующие её целям и ориентированные на развитие логического мышления, самодисциплины, аналитических способностей и ответственного отношения к итоговой аттестации:

- Объяснительно-иллюстративный метод - как основной способ передачи знаний через лекции, конспекты и презентации педагога, сопровождаемые демонстрацией наглядных пособий: алгоритмов построения графиков с преобразованиями; схем и таблиц по классификации уравнений (показательные, логарифмические, тригонометрические) и методов их решения; таблиц свойств функций и логарифмов; этапов решения задач с параметрами; алгоритмов учёта ОДЗ при решении логарифмических уравнений и неравенств; чертежей и моделей геометрических фигур.
- Частично-поисковый метод - при выполнении заданий на определение типа уравнения (показательное, логарифмическое, тригонометрическое или смешанное) и подбор оптимального метода решения; выявление причин возникновения ошибок (например, потеря корней при делении на выражение с переменной, неверное применение свойств логарифмов, неправильное определение знака коэффициента при чтении графика, неверное построение сечения в стереометрии); анализ ситуаций правильного и неправильного применения формул тригонометрии; распознавание полезных и ошибочных шагов в решении; определение правильной последовательности действий при решении уравнений и неравенств; выбор оптимального метода в зависимости от условия задачи (например, графический метод или аналитический при решении задач с параметрами).
- Практический метод - через выполнение конкретных заданий: построение графиков функций с использованием преобразований; решение показательных, логарифмических и тригонометрических уравнений и неравенств различных типов; решение планиметрических и стереометрических задач на вычисление и доказательство; решение текстовых и экономических задач; заполнение пропусков в алгоритмах решений; распределение заданий по группам в зависимости от метода решения; проверка корней подстановкой в исходное уравнение с учётом ОДЗ; выполнение тренировочных вариантов с ограничением времени; проверка результатов по чек-листу самопроверки (например, проверка ОДЗ, проверка корней, проверка размерности в прикладных задачах, проверка обоснованности доказательств).
- Рефлексивно-аналитический метод - через самоанализ выполненных заданий, проверку правильности решений по ключам, сравнение собственного решения с эталонным, участие в коллективных обсуждениях, ответы на вопросы о значении

изученных правил и понятий (например, «Почему важно находить ОДЗ при решении логарифмических уравнений?», «Как преобразование графика влияет на свойства функции?», «Почему при решении тригонометрических уравнений нельзя терять период?», «Как проверить, что найденное значение параметра даёт нужное число корней?», «Как обосновать параллельность плоскостей в стереометрической задаче?»).

Воспитательная составляющая реализуется через:

- формирование ответственного отношения к итоговой государственной аттестации, понимания важности систематической подготовки, соблюдения правил проведения экзамена и честности при выполнении работы;
- воспитание дисциплинированности и регулярности в подготовке, понимания ценности систематического подхода к обучению (регулярное выполнение домашних заданий, ведение конспектов, работа над ошибками);
- развитие умения работать с информацией, критически оценивать собственные результаты и корректировать план подготовки (например, на основе результатов промежуточных аттестаций перераспределять время на повторение сложных тем);
- культивирование интереса к самообразованию в области точных наук, развитию логического и алгоритмического мышления, осознанному отношению к собственной образовательной траектории (выбор вуза, направления подготовки).

Обучение осуществляется с применением следующих педагогических технологий:

- Технология поэтапного формирования знаний и навыков - обучающиеся последовательно осваивают материал от наиболее наглядного и доступного (элементарные функции и их графики, чтение графиков) к более сложному (преобразования графиков, построение сложных функций с модулями и параметрами), затем переходят к изучению логарифмов и показательной функции, тригонометрии, а на завершающем этапе осваивают методы решения комбинированных уравнений и неравенств, включая задания с параметрами, а также планиметрию, стереометрию, текстовые задачи, вероятность и комбинаторику. Такой подход обеспечивает постепенное наращивание сложности и позволяет обучающимся чувствовать уверенность на каждом этапе.
- Технология здоровьесберегающего обучения - чередование теоретических и практических блоков (например, 20 минут теории, затем 25 минут практической работы), обязательное включение перерывов (5-10 минут после каждого академического часа), контроль осанки, соответствие объёма и сложности материала возрастным возможностям обучающихся (16-17 лет), использование физкультминутки при длительной работе с чертежами и вычислениями.

Учебное занятие в рамках программы строится как завершённый образовательный цикл, последовательно реализующий четыре ключевых компонента, направленных на достижение планируемых результатов и обеспечение текущего контроля успеваемости.

1. Теоретико-информационный блок. Цель: формирование у обучающихся системы знаний, понятий и представлений по теме занятия. В результате обучающийся получает необходимую теоретическую основу для выполнения практических заданий. Содержание: структура и содержание КИМ ЕГЭ по математике профильного уровня 2026 года (часть 1 - 12 заданий с кратким ответом, часть 2 - 7 заданий с развёрнутым ответом, всего 19 заданий), система оценивания заданий с кратким и развёрнутым ответом, правила заполнения бланков, критерии оценивания (в том числе критерии к заданиям № 13-19 с развёрнутым ответом); свойства элементарных функций: линейной $y = kx + b$, квадратичной $y = ax^2 + bx + c$, обратной пропорциональности $y = k/x$, показательной $y = a^x$, логарифмической $y = \log_a x$, тригонометрических $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$; их графики, область определения, множество значений, нули, промежутки монотонности, экстремумы, асимптоты; правила преобразований графиков: параллельный перенос вдоль осей координат ($y = f(x) + a$, $y = f(x - a)$); растяжение и сжатие вдоль осей ($y = kf(x)$, $y = f(kx)$); симметрия относительно осей и начала координат ($y = -f(x)$, $y = f(-x)$, $y = -f(-x)$); модульные преобразования ($y = |f(x)|$ и $y = f(|x|)$); определение логарифма, основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b} = b$; свойства логарифмов (логарифм произведения, частного, степени; переход к новому основанию), область допустимых значений логарифмических выражений; методы решения показательных уравнений и неравенств (приведение к общему основанию, замена переменной, логарифмирование); методы решения логарифмических уравнений и неравенств (потенцирование, замена переменной, приведение к одному основанию, учёт ОДЗ); основные тригонометрические тождества, формулы приведения, формулы сложения и двойного угла, преобразование суммы в произведение; методы решения тригонометрических уравнений (простейшие, с заменой переменной, однородные, с использованием формул, метод введения вспомогательного угла); алгоритмы решения задач с параметрами, связанных с графиками функций (определение числа корней уравнения в зависимости от параметра, нахождение значений параметра, при которых уравнение имеет заданное число корней); типичные ошибки при выполнении экзаменационных заданий по темам модулей (например, потеря корней при решении тригонометрических уравнений, неверное определение знака параметра по графику, неправильное применение свойств логарифмов, неучёт ОДЗ, неверное построение сечений, ошибки в применении теорем) и способы их предотвращения; стратегии распределения времени на экзамене (235 минут на 19 заданий) и порядок выполнения заданий (сначала задания с кратким ответом, затем с развёрнутым; приоритетность заданий по сложности).
2. Практико-преобразующий блок. Цель: перевод теоретических знаний в практические умения. В результате обучающийся создаёт конкретный образовательный продукт, демонстрирующий применение изученной теории.

Содержание: решение заданий в формате ЕГЭ по каждой теме: построение и чтение графиков (№ 8, 11, 12), преобразования графиков, нахождение параметров функций по графику; решение показательных, логарифмических и тригонометрических уравнений и неравенств (№ 6, 13, 15); решение планиметрических задач (№ 1, 2, 17); решение стереометрических задач (№ 3, 14); решение текстовых задач на движение, работу, проценты, экономические задачи (№ 9, 10, 16); решение задач на вероятность и математическое ожидание (№ 4, 5); решение задач с параметрами (№ 18) и комбинаторно-логических задач (№ 19); выполнение тренировочных вариантов с ограничением времени; заполнение пропусков в алгоритмах решения уравнений и неравенств; составление алгоритмов решения типовых задач различных типов (алгоритм построения графика с модулем, алгоритм решения показательного уравнения с заменой, алгоритм решения тригонометрического уравнения с отбором корней, алгоритм решения стереометрической задачи на доказательство); работа с графиками функций: чтение свойств, определение параметров, построение по точкам и с помощью преобразований; решение задач с параметрами графическим методом; преобразование логарифмических и показательных выражений; решение прикладных задач с использованием логарифмов; заполнение бланков ответов ЕГЭ в соответствии с установленными требованиями; составление индивидуального плана повторения тем на основе анализа ошибок, допущенных в тренировочных работах.

3. Оценочно-коррекционный блок. Цель: обеспечение объективной проверки достигнутых результатов, выявление затруднений и их своевременная коррекция. В результате обучающийся получает обратную связь от педагога, а педагог - данные для мониторинга образовательных результатов. Содержание: проверка педагогом выполненных заданий в рабочих тетрадях (заполненные таблицы свойств функций, алгоритмы, построенные графики, решения уравнений, чертежи, планы подготовки) по критериям полноты, точности и соответствия изученному материалу; проверка тренировочных вариантов по ключам: правильность выполнения заданий с кратким ответом, корректность выбора методов решения, точность заполнения бланков, обоснованность шагов в заданиях с развёрнутым ответом; оценка устных ответов обучающихся в ходе коллективных обсуждений: умение объяснить значение понятий (например, «Что такое основное логарифмическое тождество?», «Как влияет параметр a на график показательной функции?», «Как обосновать параллельность плоскостей в стереометрической задаче?»), обосновать выбор метода решения, охарактеризовать преимущества и недостатки различных способов решения задач (например, аналитический метод vs графический метод при решении уравнений с параметрами); предоставление индивидуальной обратной связи с указанием успешно освоенного материала и рекомендациями по темам, требующим дополнительного закрепления (например, «Вам стоит повторить свойства

логарифмов» или «Обратите внимание на учёт ОДЗ при потенцировании»); проведение промежуточных аттестаций после каждого модуля (письменная работа в формате ЕГЭ по темам модуля) с фиксацией результатов в журнале успеваемости.

4. Рефлексивный блок. Цель: развитие у обучающихся способности к самоанализу, формирование осознанного отношения к собственному обучению и результатам подготовки. В результате обучающийся закрепляет осмысленность обучения, формирует личную ответственность за свои образовательные результаты. Содержание: ответы на вопросы после выполнения задания: «Что было легко? Что вызвало затруднения? Почему?» (например, «Построение графика с модулем оказалось сложным из-за невнимательности при раскрытии модуля»); сравнение собственных результатов выполнения тренировочного варианта с планируемыми, выявление отличий и формулирование одного изменения, которое можно внести в подготовку (например, «Увеличить время на проверку ОДЗ в логарифмических уравнениях»); обсуждение в группе: «Какие темы оказались самыми сложными? Какие приёмы помогли решить сложные задания?» (например, «Метод замены переменной значительно упростил решение показательных уравнений»); самооценка уровня готовности к экзамену по темам модуля и обсуждение с педагогом: «Что я могу делать каждый день, чтобы улучшить свой результат по графикам и логарифмам?» (например, «Ежедневно строить по два графика с преобразованиями и решать по три логарифмических уравнения»); формулирование личной цели на следующий модуль (например: «Отработать решение тригонометрических уравнений с отбором корней», «Научиться быстро читать графики и определять параметры», «Составить таблицу всех методов решения логарифмических уравнений», «Освоить координатный метод в стереометрии»); итоговая рефлексия по завершении всей программы: «Что я теперь знаю о структуре ЕГЭ профильного уровня? Какие стратегии выполнения заданий я освоил? Что я буду делать для подготовки в оставшееся время? Как изменилось моё отношение к математике?»).

2.5 Оценочные материалы

ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АТТЕСТАЦИЯ ПО МОДУЛЮ 1 АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

(степени, корни, логарифмы, тригонометрические формулы)

1. Вычислите: $\sqrt{48} - \sqrt{27} + \sqrt{12}$.
2. Упростите выражение: $\log_2 32 + \log_2 4 - \log_2 8$.
3. Найдите значение выражения: $\sin^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ$.
4. Используя основное логарифмическое тождество, вычислите: $2^{\log_2 5} \cdot 3^{\log_3 2}$.
5. Установите соответствие между выражениями и их упрощёнными значениями.

ВЫРАЖЕНИЯ:

- А) $\log_3 81 - \log_2 16$

Б) $8^{2/3} \cdot 16^{-1/4}$

В) $\sin 150^\circ + \cos 120^\circ$

Г) $\log_5 250 - \log_5 2$

ЗНАЧЕНИЯ:

1. 0

2. 2

3. 3

4. 4

В таблице под каждой буквой укажите номер соответствующего значения.

А	Б	В	Г

6. Найдите область определения выражения: $\log_{0,5}(x^2 - 9)$.

7. Преобразуйте сумму в произведение: $\sin 5x + \sin x$.

8. Упростите: $\frac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x}$.

9. Упростите выражение: $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6$.

10. Вычислите: $\cos 75^\circ$ (используя формулу косинуса суммы).

11. Найдите значение выражения: $(\sqrt[3]{-27} + 2^{-3} \cdot 16^{1/2}) \cdot \sin \frac{\pi}{6}$.

12. Докажите тождество: $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \operatorname{tg} x$.

ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АТТЕСТАЦИЯ ПО МОДУЛЮ 2

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

(показательные, логарифмические, тригонометрические, иррациональные, системы)

1. Найдите корень уравнения: $2^{3x-1} = 32$.

2. Решите уравнение: $\log_2(x + 3) = 4$.

3. Решите уравнение: $\sin 2x = 1$ на промежутке $[0; 2\pi]$. Ответ запишите в виде суммы корней.

4. Найдите область определения функции: $y = \log_{0,5}(x^2 - 9)$.

5. Установите соответствие между уравнениями и их решениями.

УРАВНЕНИЯ:

А) $4^x - 2^{x+1} - 8 = 0$

Б) $\log_2(x - 1) + \log_2(x + 1) = 3$

В) $\cos 2x + \cos x = 0$

Г) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} = 9$

РЕШЕНИЯ:

1. $x = 3$

2. $x = 0$

3. $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$

4. $x = \pi + 2\pi n$ и $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$

В таблице под каждой буквой укажите номер соответствующего решения.

А	Б	В	Г

6. Решите неравенство: $\log_{0,2}(x + 2) \geq -1$.

7. Решите уравнение: $\log_2(x - 1) + \log_2(x + 1) = \log_2 15$. Найдите все корни и проверьте ОДЗ.

8. Решите уравнение: $\cos 2x - \sin^2 x = 0,25$. Найдите все корни, принадлежащие промежутку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

9. Решите систему: $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12 \\ 2^y \cdot 3^x = 18 \end{cases}$.

10. Решите уравнение: $\log_2(4^x + 1) = x + 2$.

11. Решите систему: $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ x + y = \pi \end{cases}$. Найдите все решения на промежутке $[0; \pi]$.

12. Прикладная задача: вкладчик положил в банк 100 000 рублей под 12% годовых (сложные проценты). Через сколько лет сумма вклада превысит 200 000 рублей? Ответ округлите до целых лет (используйте логарифмы).

ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АТТЕСТАЦИЯ ПО МОДУЛЮ 3

ФУНКЦИИ, ГРАФИКИ, ПРОИЗВОДНАЯ

1. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Определите количество точек, в которых производная функции равна нулю.

2. Установите соответствие между функциями и их производными.

ФУНКЦИИ:

А) $y = x^3 - 3x$

Б) $y = \sin x + \cos x$

В) $y = e^x \cdot \ln x$

Г) $y = \frac{x}{x+1}$

ПРОИЗВОДНЫЕ:

1. $y' = \frac{1}{(x+1)^2}$

2. $y' = 3x^2 - 3$

3. $y' = e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right)$

4. $y' = \cos x - \sin x$

В таблице под каждой буквой укажите номер соответствующей производной.

А	Б	В	Г

3. На рисунке изображён график производной функции $y = f'(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой функция $f(x)$ достигает минимума.

4. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = x^2 - 4x + 3$ в точке $x_0 = 3$.
5. На рисунке изображён график функции $y = a \sin(bx) + c$. Найдите значение $a + b + c$ (считая, что $b > 0$).
6. По графику функции $y = f(x)$ (рисунок) определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-; 35]$.
7. Установите соответствие между графиками функций и их свойствами.

ГРАФИКИ (описательно):

- А) парабола, ветви вверх, вершина в точке $(2; -1)$
- Б) гипербола, ветви в I и III четвертях
- В) прямая, проходящая через точки $(0; 2)$ и $(1; 5)$
- Г) экспонента, возрастающая, проходит через $(0; 1)$

СВОЙСТВА:

1. функция убывает на всей области определения
2. функция возрастает на всей области определения
3. функция имеет точку минимума
4. функция принимает только положительные значения

В таблице под каждой буквой укажите номер соответствующего свойства.

А	Б	В	Г

8. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$. Укажите точки экстремума.
9. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ на отрезке $[0; 3]$.
10. Постройте график функции $y = |x^2 - 4x + 3|$. Определите, при каких значениях параметра a уравнение $|x^2 - 4x + 3| = a$ имеет ровно два корня.
11. Требуется изготовить коробку без крышки из квадратного листа жести со стороной 30 см, вырезая по углам равные квадраты и загибая края. Какой должна быть сторона вырезаемого квадрата, чтобы объём коробки был максимальным? (Решение с использованием производной.)
12. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ (кусочно-линейный). Используя график, определите область определения, нули функции, промежутки знакопостоянства и наибольшее/наименьшее значение на отрезке $[-; 33]$.

ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АТТЕСТАЦИЯ ПО МОДУЛЮ 4

ПЛАНИМЕТРИЯ

1. В треугольнике ABC стороны $AB = 5$, $BC = 7$, угол $B = 60^\circ$. Найдите сторону AC .
2. В прямоугольном треугольнике катеты равны 6 и 8. Найдите радиус описанной окружности.
3. Установите соответствие между фигурами и формулами для площади.

ФИГУРЫ:

- А) Трапеция с основаниями a и b и высотой h
Б) Ромб с диагоналями d_1 и d_2
В) Параллелограмм со сторонами a и b и углом α между ними
Г) Треугольник со сторонами a, b, c (полупериметр p)

ФОРМУЛЫ ПЛОЩАДИ:

1. $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$
2. $S = \frac{a+b}{2} h$
3. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
4. $S = ab \sin \alpha$

В таблице под каждой буквой укажите номер соответствующей формулы.

А	Б	В	Г

4. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке E . Известно, что $AE = 4$, $EB = 6$, $CE = 3$. Найдите ED .
5. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$, угол $A = 70^\circ$. Найдите угол C .
6. Основания трапеции равны 8 и 14, а высота равна 6. Найдите площадь трапеции.
7. Установите соответствие между четырёхугольниками и их свойствами.

ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКИ:

- А) Параллелограмм
Б) Прямоугольник
В) Ромб
Г) Квадрат

СВОЙСТВА:

1. Диагонали равны и точкой пересечения делятся пополам
2. Диагонали взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами углов
3. Диагонали равны, взаимно перпендикулярны и делят углы пополам
4. Противоположные стороны равны и параллельны

В таблице под каждой буквой укажите номер соответствующего свойства.

А	Б	В	Г

8. В треугольнике ABC стороны $AB = 13$, $BC = 14$, $AC = 15$. Найдите: а) площадь треугольника; б) радиус вписанной окружности.
9. Из точки A к окружности проведены касательная AB (точка касания B) и секущая ACD (точки пересечения с окружностью C и D , C между A и D). Известно, что $AB = 8$, $AC = 4$. Найдите AD и радиус окружности, если расстояние от центра до точки A равно 10.

10. В параллелограмме $ABCD$ стороны $AB = 6$, $AD = 8$, угол $\angle A = 60^\circ$. Найдите длину диагонали BD и площадь параллелограмма.
11. Докажите, что в равнобедренной трапеции диагонали равны. (Выполните доказательство, используя свойства.)
12. Координатным методом найдите угол между прямыми AB и CD , где $A(1; 2)$, $B(4; 6)$, $C(2; -1)$, $D(5; 3)$.

ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АТТЕСТАЦИЯ ПО МОДУЛЮ 5

СТЕРЕОМЕТРИЯ

1. В прямоугольном параллелепипеде измерения равны 3, 4 и 12. Найдите длину диагонали.
2. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 6, высота равна 4. Найдите объём пирамиды.
3. Установите соответствие между телами и формулами для объёма.

ТЕЛА:

- А) Цилиндр
Б) Конус
В) Шар
Г) Пирамида

ФОРМУЛЫ ОБЪЁМА:

1. $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$
2. $V = \pi R^2 h$
3. $V = \frac{4}{3}\pi R^3$
4. $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot h$

В таблице под каждой буквой укажите номер соответствующей формулы.

А	Б	В	Г

4. В конусе радиус основания равен 3, высота равна 4. Найдите образующую и площадь боковой поверхности.
5. Шар вписан в куб с ребром 6. Найдите объём шара.
6. В правильной четырёхугольной призме сторона основания равна 4, а высота равна 7. Найдите площадь полной поверхности.
7. Установите соответствие между фигурами и их сечениями (описательно).

ФИГУРЫ:

- А) Куб, сечение плоскостью, проходящей через три вершины
- Б) Правильная четырёхугольная пирамида, сечение плоскостью, проходящей через вершину и середины двух противоположных рёбер основания
- В) Цилиндр, осевое сечение
- Г) Конус, сечение плоскостью, параллельной основанию

СЕЧЕНИЯ:

1. Круг
2. Прямоугольник
3. Треугольник
4. Равнобедренный треугольник

В таблице под каждой буквой укажите номер соответствующего сечения.

А	Б	В	Г

8. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна $6\sqrt{3}$, а боковое ребро равно 10. Найдите: а) высоту пирамиды; б) объём; в) площадь боковой поверхности.
9. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 2 найдите угол между прямой $A_1 B$ и плоскостью BCC_1 . Решите координатным методом.
10. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через середины рёбер AB , AD и AA_1 . Найдите площадь этого сечения, если ребро куба равно 4.
11. В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны. Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания.
12. Найдите расстояние от точки $M(1; 2; 3)$ до плоскости $2x - y + 2z - 4 = 0$ и угол между прямой, проходящей через точку M и начало координат, и этой плоскостью.

ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АТТЕСТАЦИЯ ПО МОДУЛЮ 6

ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ, ВЕРОЯТНОСТЬ, ПАРАМЕТРЫ, ЛОГИКА

1. Из пункта A в B выехал автомобиль со скоростью 70 км/ч. Через 3 часа из A в том же направлении выехал мотоциклист со скоростью 100 км/ч. Через сколько часов мотоциклист догонит автомобиль?
2. Первый рабочий выполняет заказ за 10 дней, второй – за 15 дней. За сколько дней они выполнят заказ, работая вместе?
3. В сплаве меди и цинка содержится 40% меди. После добавления 6 кг цинка содержание меди стало 25%. Найдите первоначальную массу сплава.
4. Бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков больше 8.
5. Сколько различных трёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 (цифры не повторяются)?
6. Установите соответствие между задачами и их решениями (или уравнениями).

ЗАДАЧИ:

- А) Вклад 50 000 руб. под 10% годовых (сложные проценты) через 2 года. Какая сумма?
- Б) Кредит 200 000 руб. на 3 года под 15% годовых, дифференцированные платежи. Найти общую сумму процентов.
- В) Найти наибольшее значение функции прибыли $P(x) = -x^2 + 10x - 16$ (тыс. руб.).
- Г) Сколько лет потребуется, чтобы вклад удвоился при ставке 8% годовых?

РЕШЕНИЯ (формулы или ответы):

1. $x = 5$ (тыс. руб.)
2. $S = 50000 \cdot (1,1)^2 = 60500$ руб.
3. $t = \frac{\ln 2}{\ln 1,08}$
4. $I = \frac{200000 \cdot 0,15 \cdot (3+1)}{2} = 60000$ руб.

В таблице под каждой буквой укажите номер соответствующего решения.

А Б В Г

7. Решите уравнение $\log_2(x - 3) + \log_2(x + 1) = \log_2 5$. Найдите корни и проверьте ОДЗ.
8. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $|x^2 - 4x| = a$ имеет ровно три корня. Ответ обоснуйте графически.
9. В урне 5 белых и 7 чёрных шаров. Из неё случайным образом вынимают 3 шара. Какова вероятность того, что среди них ровно 2 белых?
10. Найдите все пары натуральных чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$.
11. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 36 \\ 2^y \cdot 3^x = 24 \end{cases}$.
12. Докажите, что среди любых 52 целых чисел найдутся два, разность которых делится на 5 (используйте принцип Дирихле).

2.6 Список литературы

1. Швед, Е. А. Возможности оценивания уровня сформированности базовых знаний по математике в формате единого государственного экзамена / Е. А. Швед, Л. А. Болотюк, В. А. Болотюк // Мир науки, культуры, образования. - 2022. - № 3(94). - С. 16-20. URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_49188041_51852090.pdf
2. Разработка методического обеспечения процесса обучения тригонометрии в рамках подготовки к ЕГЭ по математике / Т. В. Деревянко, Л. Н. Горелова, А. А. Васильев, О. В. Васильева // Проблемы и перспективы современного образования: практика вуза и школы : Сборник научных трудов X Международной научно-практической конференции, Новокузнецк, 06 февраля 2026 года. - Новокузнецк: Кемеровский государственный университет, 2026. - С. 265-270. URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_91512542_27904641.pdf
3. Самуйлова, С. В. Классификация подходов к решению некоторых типов задач повышенной сложности в ЕГЭ по математике / С. В. Самуйлова, С. В. Самуйлов // Символ науки: международный научный журнал. - 2016. - № 3-2(15). - С. 124-126. URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_27644691_29309518.pdf
4. Кисельников, И. В. Онлайн-коммуникация школьников при подготовке к ЕГЭ по математике: вызовы и возможности / И. В. Кисельников // Динамика медиасистем.

- 2025. - Т. 5, № 1. - С. 295-302. URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_82885961_76326882.pdf

5. Симоновская, Г. А. Методика использования опранных геометрических задач при подготовке к ЕГЭ по математике / Г. А. Симоновская, Е. В. Игонина // Современные проблемы физико-математических наук : Материалы IX Всероссийской научно-практической конференции, Орёл, 24-25 ноября 2023 года. - Орёл: Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, 2023. - С. 635-639. URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_80383943_72871682.pdf
6. Павлова, Т. А. Подготовка к ЕГЭ по математике в малых группах / Т. А. Павлова, М. Н. Уварова // Ученые записки Орловского государственного университета. - 2019. - № 2(83). - С. 296-300. URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_41370330_94661691.pdf

3. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА МОДУЛЯ 1

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Цель модуля: систематизация и углубление знаний о свойствах степеней, корней, логарифмов и тригонометрических формул; формирование устойчивых навыков преобразования и вычисления значений алгебраических выражений, необходимых для успешного выполнения заданий ЕГЭ профильного уровня, связанных с преобразованиями (задание № 7, а также подготовка к решению уравнений и неравенств № 6, 13, 15, где требуются уверенные алгебраические преобразования).

Задачи модуля:

- Повторить и закрепить свойства степени с натуральным, целым и рациональным показателем и правила действий с корнями n -й степени.
- Сформировать чёткое понимание определения логарифма, основного логарифмического тождества, свойств логарифмов (логарифм произведения, частного, степени, переход к новому основанию) и области допустимых значений логарифмических выражений.
- Отработать основные тригонометрические тождества, формулы приведения, синус и косинус суммы и разности, двойного угла, преобразование суммы тригонометрических функций в произведение и обратно.
- Научить упрощать и вычислять значения выражений, содержащих одновременно степени, корни, логарифмы и тригонометрические функции, в том числе в комбинированных заданиях.
- Развить внимание к ОДЗ, аккуратность при преобразованиях и умение проверять полученные результаты подстановкой.
- Подготовить базу для решения уравнений и неравенств в модулях 2 и 3 и прикладных задач в модуле 6.

Планируемые результаты освоения модуля 1

Обучающийся будет знать:

- Свойства степеней, корней и логарифмов; основное логарифмическое тождество и формулу перехода к новому основанию.
- Основные тригонометрические тождества, формулы приведения, сложения, двойного угла, преобразования суммы в произведение.
- Типичные ошибки при преобразованиях и способы их предотвращения.

Обучающийся будет **уметь**:

- Упрощать выражения, содержащие степени с рациональными показателями и корни.
- Вычислять значения логарифмических выражений с использованием свойств.
- Применять основное логарифмическое тождество для упрощения.
- Преобразовывать тригонометрические выражения с использованием основных формул.
- Выполнять комбинированные преобразования, содержащие несколько типов функций.
- Находить ОДЗ для выражений с логарифмами и корнями чётной степени.
- Оформлять преобразования в соответствии с требованиями ЕГЭ.

Учебный план модуля 1

Наименование тем		Всего	В том числе		Формы контроля и аттестации
			теория	практика	
Учебный кабинет	Тема 1.1. Степени и корни	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 1.2. Логарифмы: определение, основное тождество, свойства	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 1.3. Тригонометрические тождества и формулы приведения	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 1.4. Формулы сложения, двойного угла, преобразования суммы в произведение	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 1.5. Комбинированные преобразования	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Промежуточная аттестация по модулю 1	2	-	2	Промежуточная аттестация
Итого:		12	5	7	

Календарный учебный график модуля 1

Наименование тем	Всего	В том числе	
------------------	-------	-------------	--

			теория	практика	Учебная неделя, день недели
Учебный кабинет	Тема 1.1. Степени и корни	2	1	1	1-я неделя, понедельник
Учебный кабинет	Тема 1.2. Логарифмы: определение, основное тождество, свойства	2	1	1	1-я неделя, среда
Учебный кабинет	Тема 1.3. Тригонометрические тождества и формулы приведения	2	1	1	1-я неделя, пятница
Учебный кабинет	Тема 1.4. Формулы сложения, двойного угла, преобразования суммы в произведение	2	1	1	2-я неделя, понедельник
Учебный кабинет	Тема 1.5. Комбинированные преобразования	2	1	1	2-я неделя, среда
Учебный кабинет	Промежуточная аттестация по модулю 1	2	-	2	2-я неделя, пятница
	Итого:	12	5	7	

Содержание модуля 1

Тема 1.1. Степени и корни

Теория

В заданиях ЕГЭ профильного уровня (№ 7) проверяется умение вычислять значения выражений со степенями и корнями. Для этого необходимо знать свойства степени с натуральным, целым и рациональным показателем, а также свойства корня n-й степени.

Степень с натуральным показателем: $a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ (n раз). Свойства: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$, $(ab)^n = a^n b^n$, $a^m / a^n = a^{m-n}$ (при $a \neq 0$), $a^0 = 1$ ($a \neq 0$), $a^{-n} = 1/a^n$, $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ (при $a > 0$).

Корень n-й степени: $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$. Свойства: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, $\sqrt[n]{a/b} = \sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b}$, $(\sqrt[n]{a})^n = a$, $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ для чётных n, $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

Преобразование выражений с корнями: вынесение множителя из-под знака корня, внесение под знак корня, освобождение от иррациональности в знаменателе (умножение на сопряжённое выражение). ОДЗ для корней чётной степени: подкоренное выражение ≥ 0 .

Таблица 1. Свойства степеней и корней

Свойство	Формула	Пример
Произведение степеней	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^7 = 128$
Частное степеней	$a^m / a^n = a^{m-n}$	$3^5 / 3^2 = 3^3 = 27$
Степень степени	$(a^m)^n = a^{mn}$	$(5^2)^3 = 5^6 = 15625$
Степень произведения	$(ab)^n = a^n b^n$	$(2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4 = 1296$
Степень с нулевым показателем	$a^0 = 1 (a \neq 0)$	$7^0 = 1$
Степень с отрицательным показателем	$a^{-n} = 1/a^n$	$2^{-3} = 1/8$
Степень с рациональным показателем	$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$	$8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = 4$
Корень произведения	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$\sqrt{16 \cdot 25} = 4 \cdot 5 = 20$
Корень частного	$\sqrt[n]{a/b} = \sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b}$	$\sqrt{36/4} = 6/2 = 3$
Корень степени	$(\sqrt[n]{a})^n = a$	$(\sqrt[3]{8})^3 = 8$
Корень из степени	$(\sqrt[n]{a})^n = a$	a) (для чётных n)

Практические задания

1. Упростите: $\sqrt{50} + 2\sqrt{18} - \sqrt{32}$.
2. Вычислите: $8^{2/3} \cdot 16^{-1/4}$.
3. Освободитесь от иррациональности в знаменателе: $\frac{5}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{5}-1}$.
4. Найдите ОДЗ: $\sqrt{x-3} + \frac{1}{\sqrt{5-x}}$.
5. Найдите значение выражения: $\sqrt[3]{27} - \sqrt{64} + 2^{-2}$.
6. Вычислите: $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{8}} - 4$.
7. Упростите: $\sqrt[3]{a^6}$ при $a < 0$.
8. Найдите значение выражения: $(\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt{16})/2$.

9. Освободитесь от иррациональности: $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$.

10. Задание из ЕГЭ (№ 7): найдите значение выражения $\sqrt{48} - \sqrt{27} + \sqrt{12}$.

Тема 1.2. Логарифмы: определение, основное тождество, свойства

Теория

Логарифмы широко используются в ЕГЭ (задания № 7, 13, 15, 18) и являются важным инструментом для решения показательных уравнений и прикладных задач.

Определение: $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$ ($a > 0, a \neq 1, b > 0$).

Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b} = b$.

Область допустимых значений (ОДЗ) для логарифмических выражений: аргумент логарифма положителен, основание положительно и не равно 1.

Таблица 2. Свойства логарифмов

Свойство	Формула	Пример
Логарифм произведения	$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$	$\log_2(8 \cdot 4) = 3 + 2 = 5$
Логарифм частного	$\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$	$\log_3(81/9) = 4 - 2 = 2$
Логарифм степени	$\log_a x^n = n \log_a x$	$\log_5 25^3 = 3 \cdot 2 = 6$
Переход к новому основанию	$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$	$\log_4 9 = \frac{\log_2 9}{\log_2 4} = \frac{\log_2 9}{2}$
Основное тождество	$a^{\log_a b} = b$	$2^{\log_2 7} = 7$
Логарифм единицы	$\log_a 1 = 0$	$\log_7 1 = 0$
Логарифм основания	$\log_a a = 1$	$\log_6 6 = 1$

Практические задания

- Вычислите: а) $\log_2 16$; б) $\log_3 81$; в) $\log_{0,2} 0,008$; г) $\log_{\sqrt{2}} 8$; д) $\log_7 1$; е) $\log_6 6$.
- Вычислите, используя свойства: а) $\log_2 32 + \log_2 4$; б) $\log_3 108 - \log_3 4$; в) $\log_5 25^3$; г) $\log_4 16 \cdot \log_4 64$.
- Примените основное тождество: а) $2^{\log_2 5}$; б) $3^{\log_3 7 + \log_3 2}$; в) $5^{\log_5 10 - \log_5 2}$.
- Перейдите к новому основанию: а) выразите $\log_4 9$ через логарифмы по основанию 2; б) выразите $\log_3 8$ через логарифмы по основанию 2.
- Сравните числа: а) $\log_2 3$ и $\log_4 10$; б) $\log_3 5$ и $\log_5 3$.
- Найдите область определения выражения: а) $\log_3(x - 2)$; б) $\log_{0,5}(x^2 - 4)$; в) $\log_x 5$.
- Задание из ЕГЭ (№ 7): найдите значение выражения $\log_3 1,5 + \log_3 18$.

8. Задание из ЕГЭ (№ 7): вычислите $2\log_5 10 + \log_5 0,25$.

9. Упростите: $\log_a \frac{a^3}{\sqrt{a}}$.

10. Найдите x , если $\log_2 x = -3$.

Тема 1.3. Тригонометрические тождества и формулы приведения

Теория

Тригонометрические формулы широко используются в заданиях ЕГЭ (№ 7, 13).

Основные тождества:

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
- $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$.
- $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$, $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$.

Формулы приведения: правило «лошадь» (меняется ли функция на кофункцию, знак в зависимости от четверти). Для углов $\pi \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$, $\pi/2 \pm \alpha$, $3\pi/2 \pm \alpha$.

Таблица 3. Основные тригонометрические формулы

Назначение	Формула	Пример
Основное тождество	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = 1$
Тангенс и котангенс	$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$	$\operatorname{tg} 45^\circ = 1$
Связь с тангенсом	$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$1 + \operatorname{tg}^2 60^\circ = \frac{1}{\cos^2 60^\circ}$
Связь с котангенсом	$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$	$1 + \operatorname{ctg}^2 45^\circ = \frac{1}{\sin^2 45^\circ}$
Чётность синуса	$\sin(-x) = -\sin x$	$\sin(-30^\circ) = -0,5$
Чётность косинуса	$\cos(-x) = \cos x$	$\cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ$

Практические задания

1. Упростите: $\sin^2 x + \cos^2 x + \operatorname{tg}^2 x \cdot \cos^2 x$.
2. Примените формулы приведения: $\sin(180^\circ - \alpha)$, $\cos(90^\circ + \alpha)$, $\operatorname{tg}(270^\circ - \alpha)$.
3. Вычислите без калькулятора: $\sin 150^\circ$, $\cos 225^\circ$, $\operatorname{tg} 135^\circ$, $\sin 240^\circ$.
4. Зная $\sin x = 3/5$ и $x \in (0; \pi/2)$, найдите $\cos x$, $\operatorname{tg} x$.
5. Докажите тождество: $\frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$.
6. Задание из ЕГЭ (№ 7): найдите значение выражения $\sin^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ$.
7. Задание из ЕГЭ (№ 7): вычислите $\frac{\sin 120^\circ}{\cos 30^\circ}$.
8. Упростите: $\frac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x}$.

9. Найдите значение выражения: $\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ + \operatorname{tg}^2 45^\circ$.

10. Зная $\cos x = 0,8$ и $x \in (0; \pi/2)$, найдите $\sin x$, $\operatorname{tg} x$.

Тема 1.4. Формулы сложения, двойного угла, преобразования суммы в произведение

Теория

Формулы сложения:

- $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$.
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$.

Формулы двойного угла:

- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$.

Преобразование суммы в произведение:

- $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$.
- $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$.
- $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$.
- $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$.

Таблица 4. Формулы сложения и двойного угла

Формула	Выражение	Пример
Синус суммы	$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$	$\begin{aligned} \sin(45^\circ + 30^\circ) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$
Синус разности	$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$	$\begin{aligned} \sin(60^\circ - 30^\circ) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$
Косинус суммы	$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$	$\begin{aligned} \cos(60^\circ + 30^\circ) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$

Косинус разности	$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$	$\begin{aligned}\cos(60^\circ - 30^\circ) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$
Синус двойного угла	$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$	$\begin{aligned}\sin 60^\circ &= 2 \sin 30^\circ \cos 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$
Косинус двойного угла	$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 x\end{aligned}$	$\begin{aligned}\cos 60^\circ &= 1 - 2\sin^2 30^\circ \\ &= 1 - 0,5 = 0,5\end{aligned}$

Практические задания

1. Упростите: $\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x$.
2. Вычислите $\sin 75^\circ$ через сумму углов 45° и 30° .
3. Зная $\cos x = 0,6$ и $x \in (0; \pi/2)$, найдите $\sin 2x$, $\cos 2x$.
4. Преобразуйте в произведение: $\sin 5x + \sin x$, $\cos 3x - \cos 7x$.
5. Докажите тождество: $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \operatorname{tg} x$.
6. Задание из ЕГЭ (№ 7): найдите значение выражения $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$.
7. Задание из ЕГЭ (№ 7): вычислите $\sin 2x$, если $\sin x = 0,5$, $x \in (0; \pi/2)$.
8. Упростите: $\frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x}$ (указание: $\cos 2x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$).
9. Преобразуйте в произведение: $\cos 4x + \cos 2x$.
10. Вычислите $\operatorname{tg} 2x$, если $\operatorname{tg} x = 2$.

Тема 1.5. Комбинированные преобразования

Теория

В заданиях ЕГЭ (№ 7) часто встречаются выражения, содержащие одновременно степени, корни, логарифмы и тригонометрические функции. Стратегия упрощения:

1. Определить ОДЗ (для логарифмов и корней чётной степени).
2. Применить свойства для приведения к более простому виду.
3. Использовать основное логарифмическое тождество и тригонометрические тождества.
4. При необходимости - переход к новому основанию.

Типичные ошибки: $\log_a(x + y) \neq \log_a x + \log_a y$; $\sin 2x \neq 2 \sin x$; $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$.

Практические задания

1. Упростите выражение: $\log_3 27 \cdot \sqrt[3]{8} - \sin^2 \frac{\pi}{4} + 2^{-1}$.
2. Вычислите: $2^{\log_2 5 + \log_2 3} \cdot \cos \frac{\pi}{3}$.

3. Найдите значение: $\log_2 \left(\sin \frac{\pi}{6} \right) + \log_2 8$ (с учётом ОДЗ).
4. Преобразуйте: $\log_a (a^2 \sqrt[3]{a}) + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$.
5. Задание из ЕГЭ (№ 7): найдите значение выражения $\sqrt[3]{-27} + 2^{-3} \cdot 16^{1/2}$.
6. Задание из ЕГЭ (№ 7): вычислите $\log_2 32 - \log_3 9$.
7. Упростите: $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ и найдите значение при $x = \pi/4$.
8. Вычислите: $\log_4 9 \cdot \log_9 16 \cdot \log_{16} 25 \cdot \log_{25} 64$.
9. Найдите значение выражения: $3^{2\log_3 2 - \log_3 4}$.
10. Упростите: $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6$.

4. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА МОДУЛЯ 2

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Цель модуля: формирование у обучающихся знаний о логарифмах, показательной и тригонометрической функциях, их свойствах и методах решения соответствующих уравнений и неравенств, а также навыков решения прикладных задач, соответствующих заданиям №14, №15, №17, №18 ЕГЭ профильного уровня.

Задачи модуля:

1. Сформировать понятие логарифма, основного логарифмического тождества и свойств логарифмов.
2. Научить преобразовывать логарифмические и показательные выражения.
3. Обучить методам решения показательных, логарифмических и тригонометрических уравнений и неравенств.
4. Сформировать навыки решения комбинированных задач, содержащих степени, логарифмы и тригонометрию.
5. Познакомить с прикладными задачами, решаемыми с помощью логарифмов (финансы, радиоактивный распад, шкалы).
6. Развить умение работать с ОДЗ и проверять корни.
7. Научить решать системы уравнений, содержащих показательные, логарифмические и тригонометрические функции.
8. Воспитывать аккуратность при выполнении преобразований и обоснованность выбора методов.

Планируемые результаты освоения модуля 2

Обучающийся будет знать:

- Определение логарифма, основное логарифмическое тождество.
- Свойства логарифмов: логарифм произведения, частного, степени; переход к новому основанию.
- Свойства показательной и логарифмической функций (монотонность, область определения, множество значений).
- Основные тригонометрические тождества, формулы приведения, сложения, двойного угла.

- Методы решения показательных, логарифмических и тригонометрических уравнений и неравенств, а также их систем.
- Прикладные формулы с логарифмами (сложные проценты, распад, шкалы).

Обучающийся будет уметь:

- Вычислять и преобразовывать логарифмические и показательные выражения.
- Решать показательные уравнения и неравенства (приведение к общему основанию, замена переменной, логарифмирование).
- Решать логарифмические уравнения и неравенства (потенцирование, замена переменной, учёт ОДЗ).
- Решать тригонометрические уравнения (простейшие, с заменой, однородные, с использованием формул).
- Решать системы уравнений, содержащих показательные, логарифмические и тригонометрические выражения.
- Применять логарифмы для решения прикладных задач.
- Оформлять решения заданий с развёрнутым ответом, обосновывая шаги.

Учебный план модуля 2

Наименование тем		Всего	В том числе		Формы контроля и аттестации
			теория	практика	
Учебный кабинет	Тема 2.1. Логарифмы: определение, основное тождество, свойства	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 2.2. Преобразования логарифмических и показательных выражений	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 2.3. Показательные уравнения и неравенства	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 2.4. Логарифмические уравнения и неравенства	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 2.5. Тригонометрические функции и формулы	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 2.6. Тригонометрические уравнения	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Промежуточная аттестация по модулю 2	2	-	2	Промежуточная аттестация
Итого:		14	6	8	

Календарный учебный график модуля

Наименование тем		Всего	В том числе		Учебная неделя, день недели
			теория	практика	
Учебный кабинет	Тема 2.1. Логарифмы: определение, основное тождество, свойства	2	1	1	3-я неделя, понедельник
Учебный кабинет	Тема 2.2. Преобразования логарифмических и показательных выражений	2	1	1	3-я неделя, среда
Учебный кабинет	Тема 2.3. Показательные уравнения и неравенства	2	1	1	3-я неделя, пятница
Учебный кабинет	Тема 2.4. Логарифмические уравнения и неравенства	2	1	1	4-я неделя, понедельник
Учебный кабинет	Тема 2.5. Тригонометрические функции и формулы	2	1	1	4-я неделя, среда
Учебный кабинет	Тема 2.6. Тригонометрические уравнения	2	1	1	4-я неделя, пятница
Учебный кабинет	Промежуточная аттестация по модулю 2	2	-	2	5-я неделя, среда
Итого:		14	6	8	

Содержание модуля 2

Тема 2.1. Логарифмы: определение, основное тождество, свойства

Теория

Логарифмы широко используются в ЕГЭ (задания №14, №15, №17, №18) и являются важным инструментом для решения показательных уравнений и прикладных задач.

Определение: Логарифмом числа b по основанию a ($a > 0, a \neq 1, b > 0$) называется показатель степени c , в которую нужно возвести a , чтобы получить b :

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b.$$

Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a b} = b.$$

Свойства логарифмов (для $a > 0, a \neq 1, x > 0, y > 0$):

1. $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$.
2. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ (логарифм произведения).

3. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ (логарифм частного).

4. $\log_a x^n = n \log_a x$ (логарифм степени).

5. $\log_a^n x = \frac{1}{n} \log_a x$.

6. Формула перехода к новому основанию: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ ($c > 0, c \neq 1$).

7. Следствие: $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

Область допустимых значений (ОДЗ) для логарифмических выражений: аргумент логарифма положителен, основание положительно и не равно 1.

Таблица 1. Свойства логарифмов

Свойство	Формула	Пример
Логарифм произведения	$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$	$\log_2(8 \cdot 4) = \log_2 8 + \log_2 4 = 3 + 2 = 5$
Логарифм частного	$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$	$\log_3 \frac{81}{9} = \log_3 81 - \log_3 9 = 4 - 2 = 2$
Логарифм степени	$\log_a x^n = n \log_a x$	$\log_5 25^3 = 3 \log_5 25 = 3 \cdot 2 = 6$
Переход к новому основанию	$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$	$\log_4 9 = \frac{\log_2 9}{\log_2 4} = \frac{\log_2 9}{2}$

Практические задания

- Вычислите: а) $\log_2 16$; б) $\log_3 81$; в) $\log_{0,2} 0,008$; г) $\log_{\sqrt{2}} 8$; д) $\log_7 1$; е) $\log_6 6$.
- Вычислите, используя свойства: а) $\log_2 32 + \log_2 4$; б) $\log_3 108 - \log_3 4$; в) $\log_5 25^3$; г) $\log_4 16 \cdot \log_4 64$.
- Примените основное тождество: а) $2^{\log_2 5}$; б) $3^{\log_3 7 + \log_3 2}$; в) $5^{\log_5 10 - \log_5 2}$.
- Перейдите к новому основанию: а) выразите $\log_4 9$ через логарифмы по основанию 2; б) выразите $\log_3 8$ через логарифмы по основанию 2.
- Сравните числа: а) $\log_2 3$ и $\log_4 10$; б) $\log_3 5$ и $\log_5 3$.
- Найдите область определения выражения: а) $\log_3(x - 2)$; б) $\log_{0,5}(x^2 - 4)$; в) $\log_x 5$.
- Задание из ЕГЭ (№14): найдите значение выражения $\log_3 1,5 + \log_3 18$.
- Задание из ЕГЭ (№15): вычислите $2 \log_5 10 + \log_5 0,25$.
- Упростите: $\log_a \frac{a^3}{\sqrt{a}}$.
- Найдите x , если $\log_2 x = -3$.

Тема 2.2. Преобразования логарифмических и показательных выражений

Теория

В заданиях ЕГЭ (№14, №15) часто требуется упростить выражения, содержащие логарифмы и степени, или найти их значения при заданных условиях.

Основные приёмы:

- использование свойств логарифмов для "свёртывания" суммы/разности в логарифм произведения/частного;
- вынесение показателя степени из-под знака логарифма;
- применение формулы перехода к новому основанию для приведения к общему основанию;
- использование основного тождества для упрощения выражений вида $a^{\log_a b}$;
- преобразование степеней с рациональными показателями.

Примеры:

- $\log_2 24 - \log_2 3 = \log_2 \frac{24}{3} = \log_2 8 = 3.$
- $\log_3 27 + \log_3 2 - \log_3 18 = \log_3 \frac{27 \cdot 2}{18} = \log_3 3 = 1.$
- $\log_a \frac{a^3}{\sqrt{a}} = \log_a a^{3-0,5} = \log_a a^{2,5} = 2,5.$
- $2^{\log_2 3 + \log_2 5} = 2^{\log_2 15} = 15.$

Практические задания

1. Упростите выражения: а) $\log_5 100 - \log_5 4$; б) $\log_3 15 + \log_3 6 - \log_3 10$; в) $\log_2 48 - \log_2 3 + \log_2 1$; г) $\log_4 64 - \log_4 16$.
2. Найдите значение выражения: а) $\log_2 7 \cdot \log_7 4$; б) $\log_3 5 \cdot \log_5 9$; в) $\log_4 9 \cdot \log_9 16$.
3. Упростите: а) $\log_a (a^2 \sqrt[3]{a})$; б) $\log_a \frac{\sqrt{a}}{a^3}$; в) $\log_{a^3} a^5$.
4. Зная, что $\log_2 3 = a$, выразите через a : $\log_6 4$ и $\log_3 8$.
5. Задание из ЕГЭ (№14): найдите значение выражения $\log_{\sqrt{2}} 8 + \log_{\sqrt{3}} 9$.
6. Задание из ЕГЭ (№15): вычислите $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6$.
7. Упростите: $3^{2\log_3 2 - \log_3 4}$.
8. Найдите значение выражения: $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 8$.
9. Представьте $\log_{81} 27$ в виде числа.
10. Упростите: $\log_4 9 + \log_{16} 27$. (Приведите к общему основанию.)

Тема 2.3. Показательные уравнения и неравенства

Теория

Показательные уравнения и неравенства часто встречаются в заданиях №17 и №18 ЕГЭ профильного уровня.

Простейшее показательное уравнение: $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x)$ (при $a > 0, a \neq 1$).

Методы решения:

1. Приведение к общему основанию.
2. Замена переменной (например, $t = a^x, t > 0$), сводящая уравнение к квадратному или рациональному.
3. Логарифмирование обеих частей (если основания разные и не сводятся к общему).

Показательные неравенства: если $a > 1$, то знак неравенства сохраняется при переходе к показателям; если $0 < a < 1$, знак меняется.

Примеры:

- $2^{x+1} = 8 \Rightarrow 2^{x+1} = 2^3 \Rightarrow x + 1 = 3 \Rightarrow x = 2$.
- $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$. Пусть $t = 2^x > 0$, тогда $t^2 - 6t + 8 = 0$, корни $t = 2$ и $t = 4$, следовательно $x = 1$ или $x = 2$.
- $3^{x^2-x} > 9 \Rightarrow 3^{x^2-x} > 3^2 \Rightarrow x^2 - x > 2 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

Практические задания

1. Решите уравнения: а) $5^{x-2} = 125$; б) $3^{2x-1} = 27$; в) $2^{x+1} + 2^x = 12$; г) $3^{x+2} - 3^x = 24$; д) $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$; е) $9^x - 4 \cdot 3^x - 45 = 0$.
2. Решите неравенства: а) $2^{x-3} < 16$; б) $(0,2)^x \geq 0,008$; в) $3^{x^2-x} > 9$; г) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4} \geq 8$.
3. Решите уравнение: $2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$.
4. Решите уравнение: $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$.
5. Решите уравнение: $5^{x+2} + 5^{x+1} = 150$.
6. Решите неравенство: $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} > 9$.
7. Задание из ЕГЭ (№17): найдите корень уравнения $6^{x-12} = \frac{1}{36}$.
8. Задание из ЕГЭ (№17): решите уравнение $4^x - 2^{x+2} - 12 = 0$.
9. Решите уравнение $2^x = 3^{x-1}$ (с логарифмированием).
10. Решите неравенство $3^x < 5^x$. (Подсказка: разделите на 5^x .)

Тема 2.4. Логарифмические уравнения и неравенства

Теория

Логарифмические уравнения и неравенства - обязательный элемент ЕГЭ (№17, №18).

Ключевая особенность - учёт ОДЗ.

Простейшее логарифмическое уравнение: $\log_a f(x) = b \Rightarrow f(x) = a^b$, при этом $f(x) > 0$.

Уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$: потенцирование $f(x) = g(x)$ с обязательной проверкой ОДЗ ($f(x) > 0, g(x) > 0$).

Замена переменной: $\log_a^2 x + b \log_a x + c = 0$, вводим $t = \log_a x$.

Логарифмические неравенства: если $a > 1$, знак сохраняется; если $0 < a < 1$, знак меняется. Обязательно учитывать ОДЗ.

Примеры:

- $\log_2(x - 1) = 3 \Rightarrow x - 1 = 2^3 \Rightarrow x = 9$, ОДЗ: $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$, подходит.
- $\log_3(x + 2) = \log_3(5 - x) \Rightarrow x + 2 = 5 - x \Rightarrow x = 1,5$, ОДЗ: $x + 2 > 0, 5 - x > 0 \Rightarrow -2 < x < 5$, подходит.
- $\log_2^2 x - 5 \log_2 x + 6 = 0 \Rightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow t = 2, t = 3 \Rightarrow x = 4, x = 8$, ОДЗ $x > 0$.

- $\log_{0,5}(x + 1) \geq -1 \Rightarrow 0 < x + 1 \leq (0,5)^{-1} = 2 \Rightarrow -1 < x \leq 1$, ОДЗ $x + 1 > 0$.

Практические задания

1. Решите уравнения: а) $\log_3(2x - 5) = 2$; б) $\log_{0,5}(x + 4) = -3$; в) $\log_5(x - 2) = \log_5(4 - x)$; г) $\log_2(x + 3) - \log_2(x - 1) = 2$; д) $\log_3(x^2 - 1) = 1 + \log_3(x - 1)$.
2. Решите уравнения с заменой: а) $\log_2^2 x - \log_2 x - 2 = 0$; б) $\log_3^2 x + 2\log_3 x - 3 = 0$; в) $\log_x 4 + \log_4 x = 2,5$.
3. Решите неравенства: а) $\log_{0,2} x \geq -1$; б) $\log_3(x + 2) < 2$; в) $\log_{1/2}(3x - 5) > 0$; г) $\log_5(x^2 - 4) \leq 1$.
4. Решите уравнение: $\log_2(x^2 - 4x + 5) = 1$.
5. Решите уравнение: $\log_2(x + 1) + \log_2(x - 1) = \log_2 8$.
6. Задание из ЕГЭ (№17): найдите корень уравнения $\log_7(8 - 2x) - \log_7 8 = \log_7 \frac{1}{40}$.
7. Задание из ЕГЭ (№17): решите уравнение $\log_{\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{4}x - 1\right) = 2$.
8. Решите уравнение $\log_2(x^2 - 9) = 3$.
9. Решите неравенство $\log_{1/3}(2x - 1) > -1$.
10. Решите уравнение $\log_3(x) + \log_x 3 = 2$. (Указание: приведите к одному основанию или замените $\log_x 3 = \frac{1}{\log_3 x}$.)

Тема 2.5. Тригонометрические функции и формулы

Теория

Тригонометрические функции и формулы широко используются в заданиях ЕГЭ №11, №12, №17, №18.

Основные тригонометрические тождества:

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
- $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$.
- $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$, $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$.

Формулы приведения (таблица или правило «лошадь»).

Формулы сложения:

- $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$.
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$.
- $\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$.

Формулы двойного угла:

- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$.
- $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$.

Преобразование суммы в произведение:

- $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$.

- $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}.$

Практические задания

1. Упростите выражения: а) $\sin^2 x + \cos^2 x + \operatorname{tg}^2 x$; б) $\frac{\sin 2x}{\sin x}$; в) $\cos 2x - \sin^2 x$; г) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x + \cos^2 x$.
2. Вычислите без калькулятора: $\sin 150^\circ$, $\cos 120^\circ$, $\operatorname{tg} 135^\circ$, $\sin 210^\circ$.
3. Используя формулы приведения, найдите: $\sin(\pi - \alpha)$, $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$, $\operatorname{tg}(\pi + \alpha)$.
4. Преобразуйте: а) $\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x$; б) $\cos 4x \cos 2x + \sin 4x \sin 2x$; в) $\sin 5x \cos 2x - \cos 5x \sin 2x$.
5. Зная, что $\sin x = \frac{3}{5}$ и $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, найдите $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$.
6. Упростите: $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$.
7. Задание из ЕГЭ (№11): на рисунке изображён график функции $y = a \sin(bx) + c$. Найдите a, b, c .
8. Докажите тождество $\sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$.
9. Выразите $\sin 3x$ через $\sin x$ (формула тройного угла).
10. Упростите $\frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x}$. (Указание: воспользуйтесь формулой $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$.)

Тема 2.6. Тригонометрические уравнения

Теория

Простейшие тригонометрические уравнения:

- $\sin x = a \Rightarrow x = (-1)^n \arcsin a + \pi n.$
- $\cos x = a \Rightarrow x = \pm \arccos a + 2\pi n.$
- $\operatorname{tg} x = a \Rightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi n.$
- $\operatorname{ctg} x = a \Rightarrow x = \operatorname{arcctg} a + \pi n.$

Методы решения более сложных уравнений:

1. Замена переменной (сведение к квадратному).
2. Однородные уравнения (деление на $\cos x$ или $\sin x$).
3. Использование формул для разложения на множители.
4. Введение вспомогательного угла для уравнений вида $a \sin x + b \cos x = c$.
5. Отбор корней на промежутке (задание №13 ЕГЭ).

Примеры:

- $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n.$
- $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$. Пусть $t = \cos x$, $t \in [-1; 1]$. Решаем квадратное, затем находим x .
- $\sin x - \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi n.$
- $\sin 2x = \cos x \Rightarrow 2 \sin x \cos x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x (2 \sin x - 1) = 0$.
Отсюда $\cos x = 0$ или $\sin x = \frac{1}{2}$.

Практические задания

1. Решите простейшие уравнения: а) $\sin x = \frac{1}{2}$; б) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\operatorname{tg} x = -1$; г) $\sin 2x = 1$.
2. Решите уравнения с заменой: а) $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$; б) $4\sin^2 x - \sin x - 3 = 0$; в) $\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 2 = 0$.
3. Решите однородные уравнения: а) $\sin x - \cos x = 0$; б) $\sin^2 x - 3\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0$.
4. Решите уравнения, используя формулы: а) $\sin 2x = \cos x$; б) $\cos 2x + \sin x = 0$; в) $\sin 3x + \sin x = 0$.
5. Найдите корни уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.
6. Задание из ЕГЭ (№17): решите уравнение $\cos 2x + \cos x = 0$.
7. Решите уравнение $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$. (Однородное.)
8. Решите уравнение $\sin x + \cos x = 1$. (Введите вспомогательный угол или возведите в квадрат с учётом ОДЗ.)
9. Решите уравнение $\sin 2x = \sin x$ на промежутке $[0; 2\pi]$.
10. Задание из ЕГЭ (№13): а) решите уравнение $\cos 2x - \sin^2 x = 0,25$; б) найдите все корни, принадлежащие промежутку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

5. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА МОДУЛЯ 3 ФУНКЦИИ, ГРАФИКИ, ПРОИЗВОДНАЯ

Цель модуля: систематизация знаний о свойствах элементарных функций, преобразованиях графиков и применении производной для исследования функций и решения оптимизационных задач, соответствующих заданиям № 8, 11, 12 и 16 ЕГЭ профильного уровня.

Задачи модуля:

1. Повторить свойства линейной, квадратичной, степенной, показательной, логарифмической и тригонометрических функций (область определения, множество значений, нули, промежутки монотонности, экстремумы, асимптоты).
2. Отработать навыки чтения графиков и определения параметров функций по графику.
3. Научить выполнять преобразования графиков (параллельный перенос, растяжение/сжатие, симметрия, модульные преобразования) и строить графики сложных функций.
4. Сформировать понимание геометрического и физического смысла производной.
5. Обучить правилам дифференцирования и нахождению производных элементарных функций.
6. Научить применять производную для исследования функций (монотонность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значение на отрезке).

7. Отработать решение задач на оптимизацию (геометрические, экономические, физические модели).
8. Развить навыки решения задач с параметрами, связанных с графиками функций.

Планируемые результаты освоения модуля 3

Обучающийся будет знать:

- Свойства всех элементарных функций, изучаемых в школьном курсе.
- Правила преобразования графиков и алгоритм построения графиков с модулями и параметрами.
- Геометрический и физический смысл производной.
- Правила дифференцирования (производные суммы, произведения, частного, сложной функции).
- Таблицу производных элементарных функций.
- Алгоритм исследования функции с помощью производной.
- Методы решения задач на оптимизацию.

Обучающийся будет уметь:

- Определять свойства функции по её графику (нули, знакопостоянство, монотонность, экстремумы).
- Находить параметры функций по графику.
- Строить графики функций с помощью преобразований, в том числе с модулями.
- Вычислять производные элементарных и сложных функций.
- Находить промежутки монотонности и экстремумы функции.
- Находить наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.
- Решать задачи на оптимизацию с использованием производной.
- Решать задачи с параметрами графическим методом.

Учебный план модуля 3

Наименование тем		Всего	В том числе		Формы контроля и аттестации
			теория	практика	
Учебный кабинет	Тема 3.1. Свойства элементарных функций и их графики	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 3.2. Преобразования графиков функций	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 3.3. Чтение графиков. Определение параметров функции по графику	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 3.4. Производная: геометрический и физический смысл,	2	1	1	Текущий контроль

	правила дифференцирования				
Учебный кабинет	Тема 3.5. Исследование функций с помощью производной (монотонность, экстремумы)	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 3.6. Наибольшее и наименьшее значение функции. Задачи на оптимизацию	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Промежуточная аттестация по модулю 3	2	-	2	Промежуточная аттестация
	Итого:	14	6	8	

Календарный учебный график модуля

Наименование тем		Всего	В том числе		Учебная неделя, день недели
			теория	практика	
Учебный кабинет	Тема 3.1. Свойства элементарных функций и их графики	2	1	1	5-я неделя, среда
Учебный кабинет	Тема 3.2. Преобразования графиков функций	2	1	1	5-я неделя, пятница
Учебный кабинет	Тема 3.3. Чтение графиков. Определение параметров функции по графику	2	1	1	6-я неделя, понедельник
Учебный кабинет	Тема 3.4. Производная: геометрический и физический смысл, правила дифференцирования	2	1	1	6-я неделя, среда
Учебный кабинет	Тема 3.5. Исследование функций с помощью производной (монотонность, экстремумы)	2	1	1	6-я неделя, пятница
Учебный кабинет	Тема 3.6. Наибольшее и наименьшее значение функции. Задачи на оптимизацию	2	1	1	7-я неделя, понедельник

Учебный кабинет	Промежуточная аттестация по модулю 3	2	-	2	7-я неделя, среда
	Итого:	14	6	8	

Тема 3.1. Свойства элементарных функций и их графики

Теория

В заданиях ЕГЭ (№ 8, 11, 12) проверяется умение определять свойства функций по их графикам и формулам. Для успешного выполнения необходимо уверенно знать характеристики основных элементарных функций.

1. Линейная функция $y = kx + b$.

- Область определения: $D(y) = \mathbb{R}$ (все действительные числа).
- Множество значений: при $k \neq 0$ - $E(y) = \mathbb{R}$; при $k = 0$ (константа $y = b$) - $E(y) = \{b\}$.
- Нуль функции: $x_0 = -b/k$ (при $k \neq 0$). Если $k = 0$ и $b \neq 0$, нулей нет.
- Монотонность: возрастает при $k > 0$, убывает при $k < 0$.
- Чётность/нечётность: при $b = 0$ функция нечётна ($y = kx$); при $b \neq 0$ - общего вида.
- График - прямая линия. Угловой коэффициент $k = \operatorname{tg} \alpha$, где α - угол наклона прямой к положительному направлению оси ОХ.

2. Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

- Область определения: $\mathbb{R}$.
- Множество значений: при $a > 0$ - $[y_0; +\infty)$, где $y_0 = c - \frac{b^2}{4a}$ (ордината вершины); при $a < 0$ - $(-\infty; y_0]$.
- Вершина параболы: $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = f(x_0)$.
- Нули: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, где $D = b^2 - 4ac$. Если $D < 0$, нулей нет; если $D = 0$, один корень (вершина лежит на оси ОХ).
- Монотонность: при $a > 0$ убывает на $(-\infty; x_0]$ и возрастает на $[x_0; +\infty)$; при $a < 0$ возрастает на $(-\infty; x_0]$ и убывает на $[x_0; +\infty)$.
- Чётность: чётна только при $b = 0$ (ось симметрии - ось ОУ).
- График - парабола, ветви вверх при $a > 0$, вниз при $a < 0$.

3. Степенная функция $y = x^n$ (n - целое или рациональное).

- При n натуральном чётном: $D = \mathbb{R}$, $E = [0; +\infty)$, чётная, убывает на $(-\infty; 0]$, возрастает на $[0; +\infty)$.
- При n натуральном нечётном: $D = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}$, нечётная, возрастает на всей области.
- При n отрицательном (например, $y = x^{-1} = 1/x$): $D = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, $E = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, нечётная, убывает на каждом из промежутков, имеет вертикальную асимптоту $x = 0$ и горизонтальную $y = 0$.

4. Показательная функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

- $D = \mathbb{R}$.
- $E = (0; +\infty)$.
- Не имеет нулей (график не пересекает ось OX).
- Монотонность: при $a > 1$ возрастает, при $0 < a < 1$ убывает.
- Горизонтальная асимптота $y = 0$ при $x \rightarrow -\infty$ (если $a > 1$) или при $x \rightarrow +\infty$ (если $0 < a < 1$).
- График проходит через точку $(0; 1)$.

5. Логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

- $D = (0; +\infty)$.
- $E = \mathbb{R}$.
- Нуль: $x = 1$.
- Монотонность: при $a > 1$ возрастает, при $0 < a < 1$ убывает.
- Вертикальная асимптота $x = 0$ (при $x \rightarrow 0^+$ функция стремится к $-\infty$ при $a > 1$ или к $+\infty$ при $0 < a < 1$).
- График проходит через точку $(1; 0)$.

6. Тригонометрические функции:

- $y = \sin x$: $D = \mathbb{R}$, $E = [-1; 1]$, нечётная, периодическая с периодом 2π . Нули: $x = \pi n$. Возрастает на $[-\pi/2 + 2\pi n; \pi/2 + 2\pi n]$, убывает на $[\pi/2 + 2\pi n; 3\pi/2 + 2\pi n]$.
- $y = \cos x$: $D = \mathbb{R}$, $E = [-1; 1]$, чётная, период 2π . Нули: $x = \pi/2 + \pi n$. Возрастает на $[\pi; 2\pi + 2\pi n]$, убывает на $[0; \pi + 2\pi n]$.
- $y = \operatorname{tg} x$: $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + \pi n\}$, $E = \mathbb{R}$, нечётная, период π . Нули: $x = \pi n$. Возрастает на каждом интервале области определения. Вертикальные асимптоты $x = \pi/2 + \pi n$.
- $y = \operatorname{ctg} x$: $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi n\}$, $E = \mathbb{R}$, нечётная, период π . Нули: $x = \pi/2 + \pi n$. Убывает на каждом интервале области определения. Вертикальные асимптоты $x = \pi n$.

При чтении графиков важно уметь различать эти функции по форме, асимптотам, точкам пересечения с осями и поведению на бесконечности. Типичные ошибки: путают показательную и степенную функции, не учитывают ограничения множества значений, неправильно определяют промежутки монотонности для тригонометрических функций из-за периодичности.

Практические задания

1. Постройте схематично графики функций: $y = 2^x$, $y = \log_2 x$, $y = \sin x$, $y = x^2 - 4x + 3$. Для каждой укажите область определения, множество значений, нули, промежутки монотонности, а также, если есть, асимптоты.
2. Для функции $y = 3x - 6$ найдите нуль, определите знак функции на промежутках, постройте график.
3. Для квадратичной функции $y = -x^2 + 4x - 3$ найдите вершину, нули, промежутки возрастания и убывания.

4. Определите по графику показательной функции (на рисунке даны точки $(0; 1)$ и $(1; 3)$) значения a и координаты точки пересечения с осью OY .
5. На рисунке изображён график логарифмической функции $y = \log_a x$, проходящий через точку $(4; 2)$. Найдите a и значение функции при $x = 8$.
6. Задание из ЕГЭ (№ 11): на рисунке изображён график функции $y = a \sin(bx) + c$. По графику определите амплитуду, период и сдвиг; найдите a, b, c .
7. Задание из ЕГЭ (№ 8): на рисунке изображён график функции $y = \log_a(x + b)$. Найдите a и b (используйте точки пересечения с осями).
8. Сравните числа, обосновывая свойствами функций: а) $\log_2 3$ и $\log_2 5$; б) $0,3^2$ и $0,3^3$; в) $\sin 1$ и $\sin 2$ (с учётом монотонности на соответствующих промежутках).
9. Определите, какая из функций $y = 2^x$, $y = x^2$, $y = \log_2 x$ быстрее растёт при больших x ; обоснуйте.
10. Постройте график функции $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $(-\pi/2; \pi/2)$ и укажите все её свойства на этом промежутке.

Тема 3.2. Преобразования графиков функций

Теория

Преобразования графиков позволяют строить графики сложных функций на основе известных графиков элементарных функций. В ЕГЭ часто требуется определить, какой график соответствует функции, полученной преобразованиями, или, наоборот, по графику определить, какие преобразования были выполнены.

1. Параллельный перенос (сдвиг) вдоль осей координат:

- $y = f(x) + a$ - график $y = f(x)$ сдвигается вдоль оси OY на a единиц: вверх, если $a > 0$, вниз, если $a < 0$. Точки пересечения с осью OX изменяются.
- $y = f(x - a)$ - сдвиг вдоль оси OX на a единиц: вправо, если $a > 0$, влево, если $a < 0$. При этом область определения и нули смещаются на a .

2. Растяжение и сжатие:

- $y = kf(x)$ - растяжение (при $|k| > 1$) или сжатие (при $0 < |k| < 1$) вдоль оси OY в $|k|$ раз; при $k < 0$ дополнительно отражается относительно оси OX .
- $y = f(kx)$ - сжатие (при $|k| > 1$) или растяжение (при $0 < |k| < 1$) вдоль оси OX в $|k|$ раз; при $k < 0$ дополнительно отражается относительно оси OY .

3. Симметрия:

- $y = -f(x)$ - отражение относительно оси OX .
- $y = f(-x)$ - отражение относительно оси OY .
- $y = -f(-x)$ - центральная симметрия относительно начала координат (поворот на 180°).

4. Модульные преобразования:

- $y = |f(x)|$ - часть графика, лежащая ниже оси OX (где $f(x) < 0$), симметрично отражается вверх; часть выше оси OX остаётся без изменений. Нули функции становятся точками излома.

- $y = f(|x|)$ - для $x \geq 0$ график совпадает с $y = f(x)$; для $x < 0$ график строится как отражение правой части (при $x \geq 0$) относительно оси ОУ. При этом функция становится чётной, даже если исходная не была чётной.

5. Последовательное применение преобразований. Важен порядок: сначала выполняются преобразования, связанные с аргументом (внутренние), затем - с функцией (внешние). Например, для построения $y = 2f(x - 1) + 3$ сначала сдвиг вправо на 1, затем растяжение по ОУ в 2 раза, затем сдвиг вверх на 3.

Типичные ошибки: путают сдвиг вдоль ОХ: $y = f(x - a)$ сдвигает вправо, а $y = f(x + a)$ - влево. Также часто забывают, что $y = |f(x)|$ не меняет участки, где $f(x) \geq 0$, а отражает только отрицательные. При построении $y = f(|x|)$ часто ошибочно отражают всю левую часть, а не только правую.

Примеры:

- Построить график $y = |x^2 - 4|$. Строим параболу $y = x^2 - 4$, её нули при $x = \pm 2$. Участок между -2 и 2 (где $y < 0$) отражаем вверх.
- Построить $y = (x - 2)^2 + 1$: из $y = x^2$ сдвиг вправо на 2 и вверх на 1.

Практические задания

1. Постройте график функции $y = (x - 2)^2 + 1$, используя преобразования из $y = x^2$. Укажите последовательность шагов.
2. Постройте график функции $y = 2 \sin x$, затем $y = \sin(2x)$, затем $y = 2 \sin(2x) + 1$. Сравните свойства (амплитуда, период, сдвиг).
3. Постройте график функции $y = |x^2 - 4|$. Определите, при каких значениях a уравнение $|x^2 - 4| = a$ имеет ровно три корня.
4. Постройте график функции $y = |x|^2 - 4|x| + 3$ (используйте $f(|x|)$ для $f(x) = x^2 - 4x + 3$, затем сдвиг).
5. Задание из ЕГЭ (№ 12): на рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Постройте график функции $y = |f(x)|$ и определите, при каких значениях a уравнение $|f(x)| = a$ имеет ровно два корня.
6. Постройте график функции $y = \log_2 |x|$. Опишите, как он получается из $y = \log_2 x$.
7. Постройте график функции $y = 3 - 2 \cos x$ (растяжение, отражение, сдвиг).
8. Опишите последовательность преобразований для получения графика $y = \frac{1}{x-1} + 2$ из $y = 1/x$.
9. Постройте график кусочно-заданной функции $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ -x + 2, & x > 0 \end{cases}$ и определите её множество значений.
10. Определите, какая из функций $y = 2^{x+1} - 3$, $y = 2^{x-1} + 3$ получается из $y = 2^x$ сдвигом и в каком направлении.

Тема 3.3. Чтение графиков. Определение параметров функции по графику

Теория

В заданиях ЕГЭ (№ 8, 11, 12) часто требуется по графику определить параметры функции (коэффициенты k, b, a, b, c и т.д.) или установить соответствие между графиком и формулой. Это требует внимательного анализа ключевых точек и формы кривой.

Алгоритм для линейной функции $y = kx + b$:

- b - ордината точки пересечения с осью ОУ (то есть значение y при $x = 0$).
- k - угловой коэффициент, равный $\operatorname{tg} \alpha$, где α - угол наклона прямой к положительному направлению оси ОХ. Можно найти по двум точкам: $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Для квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$:

- c - ордината пересечения с осью ОУ.
- $x_0 = -\frac{b}{2a}$ - абсцисса вершины; её можно найти как середину отрезка между нулями (если они есть) или как точку экстремума.
- a определяет направление ветвей (если ветви вверх, $a > 0$) и степень сжатия/растяжения. Значение a можно найти, подставив координаты вершины и ещё одной точки в уравнение и решив систему.

Для показательной функции $y = a^x$ (или сдвиги $y = a^{x+b} + c$):

- Зная точку пересечения с осью ОУ, можно найти a (если сдвиг по вертикали отсутствует, то в точке $x = 0, y = 1$).
- При наличии сдвигов: $y = a^{x-p} + q$. Точка $(p; q + 1)$ - характерная точка.

Для логарифмической функции $y = \log_a(x + b)$:

- Вертикальная асимптота $x = -b$ (так как область определения $x > -b$).
- Точка пересечения с осью ОХ: $\log_a(x + b) = 0 \Rightarrow x + b = 1 \Rightarrow x = 1 - b$.
- Зная две точки, можно найти a и b .

Для тригонометрической функции $y = a \sin(bx) + c$ (или косинус):

- a - амплитуда: половина разности максимального и минимального значений. $a = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2}$.
- c - средняя линия: $c = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2}$.
- b связано с периодом: $T = \frac{2\pi}{b}$. Период можно найти по расстоянию между соседними максимумами (или нулями).

Для гиперболы $y = \frac{k}{x}$ или сдвигов $y = \frac{k}{x-a} + b$:

- Вертикальная асимптота $x = a$, горизонтальная $y = b$.
- Если известна точка, подстановка даёт k .

Практические задания

1. По графику линейной функции (прямая проходит через точки $(-1; 2)$ и $(1; 5)$) найдите k и b .
2. На рисунке изображена парабола с вершиной $(1; -2)$ и пересекающая ось ОУ в точке $(0; -1)$. Найдите a, b, c и запишите уравнение параболы.

3. На рисунке изображён график функции $y = a\sin(bx) + c$ с амплитудой 3, периодом π , сдвигом вверх на 2. Найдите a, b, c .
4. По графику логарифмической функции (проходит через $(1; 0)$ и $(4; 2)$) найдите основание a и запишите формулу.
5. Установите соответствие между функциями $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = 2^x$, $y = \log_2 x$ и их графиками (даны четыре рисунка). Обоснуйте выбор.
6. Задание из ЕГЭ (№ 11): на рисунке изображён график функции $y = ax^2 + bx + c$. Найдите $a + b + c$ (используйте точки пересечения с осями и координаты вершины).
7. На рисунке изображён график функции $y = k/x$. Найдите k , если график проходит через точку $(2; 3)$.
8. Определите, график какой функции изображён на рисунке (варианты: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$) по характерным точкам и асимптотам.
9. По графику функции $y = a^x + b$ (на рисунке даны точки $(0; 2)$ и $(1; 5)$) найдите a и b .
10. На рисунке изображён график квадратичной функции с вершиной в точке $(-1; 23)$ и проходящий через начало координат. Найдите уравнение этой параболы.

Тема 3.4. Производная: геометрический и физический смысл, правила дифференцирования

Теория

Производная является одним из ключевых понятий математического анализа и широко используется в заданиях ЕГЭ (№ 8, 12, 16). Глубокое понимание её смысла и правил вычисления необходимо для успешного решения задач.

Определение производной: производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если этот предел существует, функция называется дифференцируемой в точке.

Геометрический смысл производной: $f'(x_0)$ - это угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 . Уравнение касательной имеет вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Угловой коэффициент $k = f'(x_0)$ равен $\operatorname{tg} \alpha$, где α - угол наклона касательной к положительному направлению оси OX . Если $f'(x_0) > 0$, касательная образует острый угол с осью OX (функция возрастает); если $f'(x_0) < 0$ - тупой (функция убывает); если $f'(x_0) = 0$ - касательная горизонтальна (возможен экстремум).

Физический смысл: если $S(t)$ - закон движения материальной точки (пусть как функция времени), то $S'(t)$ - скорость в момент времени t ; $v'(t) = S''(t)$ - ускорение. В более общем смысле производная характеризует скорость изменения любой величины.

Таблица производных основных элементарных функций:

Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$
C (константа)	0
x^n (любое действительное n)	nx^{n-1}
a^x	$a^x \ln a$
e^x	e^x
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Правила дифференцирования (для дифференцируемых функций $u(x)$, $v(x)$):

1. Производная суммы: $(u + v)' = u' + v'$.
2. Производная разности: $(u - v)' = u' - v'$.
3. Производная произведения: $(u \cdot v)' = u'v + uv'$.
4. Производная частного: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ (при $v \neq 0$).
5. Производная сложной функции (цепное правило): если $y = f(g(x))$, то $y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Важные следствия:

- Производная e^{kx} равна ke^{kx} .
- Производная $\ln |x|$ равна $1/x$ для $x \neq 0$.
- Для логарифмической функции с произвольным основанием: $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

Типичные ошибки: забывают производную константы (считают её ненулевой), путают производную a^x и x^a , неправильно применяют правило частного (порядок членов), не используют цепное правило для сложных функций, например, $(\sin(2x))'$ ошибочно считают равным $\cos(2x)$ вместо $2\cos(2x)$.

Примеры вычислений:

- $(3x^2 - 4x + 5)' = 6x - 4$.
- $(\sin x \cdot e^x)' = \cos x \cdot e^x + \sin x \cdot e^x = e^x(\cos x + \sin x)$.
- $\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)' = \frac{(2x)(x-1) - (x^2+1)(1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$.
- $(\ln(x^2 + 1))' = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}$.

Практические задания

1. Найдите производные функций: а) $y = 3x^2 - 2x + 5$; б) $y = \sin x + \cos x$; в) $y = e^x \cdot \ln x$; г) $y = \frac{x^2}{x+1}$; д) $y = \log_2(x^2 + 1)$; е) $y = (2x - 1)^5$; ж) $y = \operatorname{arctg}(3x)$.
2. Вычислите значение производной в точке: а) $f(x) = x^3 - 4x$, $x_0 = 2$; б) $f(x) = \sin 2x$, $x_0 = \pi/4$; в) $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^x$, $x_0 = 1$.
3. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = x^2$ в точке $x_0 = 1$ и составьте уравнение касательной.
4. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt{x}$ в точке $x_0 = 4$.
5. Задание из ЕГЭ (№ 8): на рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной $f'(x_0)$, если известен угол наклона касательной (или координаты двух точек на касательной).
6. Физическая задача: закон движения точки $S(t) = t^3 - 2t^2 + t$ (в метрах). Найдите скорость и ускорение в момент времени $t = 2$ с.
7. Найдите производную функции $y = \ln(\sin x)$ и определите её область определения.
8. Для функции $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ найдите производную и вычислите её значение при $x = 0$.
9. Найдите производную неявной функции, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 25$ (дифференцирование неявной функции).
10. Используя определение производной как предела, вычислите производную функции $y = x^2$ в точке $x_0 = 3$.

Тема 3.5. Исследование функций с помощью производной (монотонность, экстремумы)

Теория

Производная позволяет исследовать функцию на монотонность и экстремумы - это основа для построения графиков и решения оптимизационных задач.

Связь знака производной с монотонностью:

- Если $f'(x) > 0$ на интервале $(a; b)$, то функция $f(x)$ строго возрастает на этом интервале.
- Если $f'(x) < 0$ на интервале $(a; b)$, то функция $f(x)$ строго убывает на этом интервале.
- Если $f'(x) = 0$ на всём интервале, то функция постоянна на нём.

Критические точки - это точки из области определения, в которых производная равна нулю или не существует. В этих точках функция может менять характер монотонности. Достаточное условие экстремума (первое правило):

Пусть x_0 - критическая точка, и функция непрерывна в некоторой окрестности этой точки. Тогда:

- Если при переходе через x_0 производная меняет знак с «+» на «-», то x_0 - точка локального максимума.
- Если при переходе через x_0 производная меняет знак с «-» на «+», то x_0 - точка локального минимума.
- Если знак не меняется, то x_0 не является точкой экстремума (это точка перегиба или точка с горизонтальной касательной, но без экстремума, например, $y = x^3$ в $x = 0$).

Второе достаточное условие экстремума (через вторую производную):

Если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) > 0$, то в точке x_0 локальный минимум; если $f''(x_0) < 0$ - локальный максимум. Если $f''(x_0) = 0$, то нужно использовать первое правило или исследовать знак производной.

Алгоритм полного исследования функции с помощью производной:

1. Найти область определения функции.
2. Найти производную $f'(x)$.
3. Найти критические точки (решить $f'(x) = 0$ и определить точки, где $f'(x)$ не существует, но функция определена).
4. Разбить область определения на промежутки критическими точками и определить знак производной на каждом промежутке (например, методом пробных точек).
5. Найти промежутки возрастания и убывания.
6. Определить точки экстремума и вычислить значения функции в них.
7. (Дополнительно) найти вторую производную для определения выпуклости/вогнутости и точек перегиба, если требуется для построения графика.

Пример: Исследовать функцию $y = x^3 - 3x$.

- $D = \mathbb{R}$.
- $y' = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$.
- Критические точки: $x = -1$, $x = 1$.
- Знаки производной: на $(-\infty; -1)$: $y' > 0$ (возрастает), на $(-1; 1)$: $y' < 0$ (убывает), на $(1; +\infty)$: $y' > 0$ (возрастает).

- Экстремумы: $x = -1$ - максимум (знак $+$ на $-$), $y(-1) = 2$; $x = 1$ - минимум, $y(1) = -2$.

Типичные ошибки: забывают проверить, входят ли критические точки в область определения; не учитывают точки, где производная не существует (например, для функций с модулем или корнем); неправильно определяют знак производной на промежутках из-за неверного выбора пробных точек; путают максимумы и минимумы при смене знака.

Практические задания

1. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $y = x^3 - 3x + 1$.
2. Найдите экстремумы функции $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$. Постройте эскиз графика.
3. Исследуйте функцию $y = \frac{x^2}{x-2}$ на монотонность и экстремумы (учтите область определения).
4. Найдите точки экстремума функции $y = x^2 e^x$. (Используйте правило произведения и решите уравнение $y' = 0$.)
5. Задание из ЕГЭ (№ 12): на рисунке изображён график производной функции $y = f'(x)$. Определите количество точек экстремума функции $f(x)$ на заданном отрезке и укажите их тип (максимум/минимум).
6. Для функции $y = \sin x + \cos x$ найдите промежутки возрастания и убывания на $[0; 2\pi]$.
7. Найдите экстремумы функции $y = \ln x - x$ (учтите ОДЗ).
8. Исследуйте функцию $y = x^4 - 8x^2$ и постройте её график, указав промежутки монотонности и экстремумы.
9. Функция $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ имеет экстремумы в точках $x = 1$ и $x = 3$. Найдите коэффициенты, если известно, что $f(1) = 5$, $f(3) = 1$.
10. По графику производной $y = f'(x)$ определите, на каких промежутках функция $f(x)$ возрастает, убывает, и где находятся экстремумы (на рисунке даны точки пересечения с осью OX и знаки).

Тема 3.6. Наибольшее и наименьшее значение функции. Задачи на оптимизацию

Теория

Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на заданном отрезке - одно из ключевых умений для решения задач ЕГЭ (№ 16) и многих прикладных задач.

Теорема: если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений. Эти значения могут достигаться либо в критических точках, принадлежащих отрезку, либо на концах отрезка.

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений:

1. Убедиться, что функция непрерывна на отрезке $[a; b]$.
2. Найти производную $f'(x)$.

3. Найти все критические точки функции, принадлежащие отрезку $[a; b]$ (решить $f'(x) = 0$ и учесть точки, где производная не существует, но функция определена).
4. Вычислить значения функции в найденных критических точках и на концах отрезка: $f(a), f(b)$.
5. Сравнить полученные значения: выбрать наибольшее и наименьшее.

Замечание: если функция задана не на отрезке, а на интервале, то наибольшее/наименьшее значения могут не существовать, но можно найти супремум/инфимум.

Задачи на оптимизацию - это прикладные задачи, в которых требуется найти оптимальное значение некоторой величины (максимальную площадь, минимальную стоимость, наибольшую производительность и т.п.). Общий алгоритм:

1. Ввести переменную (или несколько, но затем свести к одной с помощью условий).
2. Выразить оптимизируемую величину (например, площадь, объём, прибыль) через эту переменную.
3. Определить область допустимых значений переменной (исходя из геометрических или физических ограничений).
4. Исследовать полученную функцию на экстремум (найти критические точки и значения на границах области, если она замкнута).
5. Выбрать значение, дающее оптимум, и интерпретировать результат в терминах исходной задачи.

Примеры классических задач:

- Из куска картона вырезать коробку максимального объёма.
- Найти прямоугольник наибольшей площади, вписанный в круг, треугольник и т.д.
- Минимизировать стоимость материала при заданном объёме (цилиндр, конус).
- Определить наилучший размер партии товара (экономическая задача).

Типичные ошибки: неправильно определяют область допустимых значений (например, забывают, что длина и ширина должны быть положительными), не проверяют концы отрезка (если область замкнута), путают максимум и минимум, не учитывают, что найденный экстремум может быть локальным, а не глобальным на всей области.

Пример: Найти наибольший объём цилиндра, вписанного в конус с радиусом основания R и высотой H . Решение: выражаем радиус и высоту цилиндра через одну переменную (например, высоту), записываем объём, находим производную, критическую точку, проверяем границы (0 и H) - получаем оптимальные размеры.

Практические задания

1. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^3 - 3x^2 + 2$ на отрезке $[-; 13]$.
2. Найдите наибольшее значение функции $y = \sin x - \cos x$ на $[0; \pi]$.
3. Задание из ЕГЭ (№ 16): найдите наибольшее значение функции $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$ на отрезке $[3; 5]$. (Подсказка: выделите целую часть или используйте производную.)

4. Оптимизационная задача: из квадратного листа жести со стороной 30 см вырезают по углам квадраты и складывают коробку без крышки. Какой должна быть сторона вырезаемого квадрата, чтобы объём коробки был максимальным? (Составьте функцию объёма, найдите максимум.)
5. Оптимизационная задача: найдите стороны прямоугольника наибольшей площади, вписанного в окружность радиуса R . (Используйте симметрию, выразите площадь через одну сторону, найдите максимум.)
6. Экономическая задача: себестоимость производства x единиц товара задаётся формулой $C(x) = 3x^2 - 12x + 20$ (тыс. руб.). При каком x себестоимость минимальна? (Найдите минимум функции на области $x \geq 0$.)
7. Найдите наименьшее значение функции $y = 2^x + 2^{-x}$ на всей области определения. (Подсказка: используйте неравенство о среднем арифметическом и геометрическом или производную.)
8. Оптимизационная задача: сумма двух положительных чисел равна 20. Найдите эти числа, если сумма их квадратов минимальна. (Составьте функцию, найдите минимум.)
9. Задача на минимальную длину забора: нужно огородить прямоугольный участок площадью 100 м^2 , примыкающий к стене (одна сторона не требует забора). Каковы должны быть размеры, чтобы длина забора была наименьшей?
10. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = x + \frac{4}{x}$ на отрезке $[1; 4]$.

6. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА МОДУЛЯ 4

ПЛАНИМЕТРИЯ

Цель модуля: систематизация и углубление знаний по планиметрии, формирование устойчивых навыков решения геометрических задач на вычисление и доказательство, соответствующих заданиям № 1, 2, 17 ЕГЭ профильного уровня, а также развитие пространственного и логического мышления.

Задачи модуля:

1. Повторить и систематизировать свойства треугольников (равнобедренный, равносторонний, прямоугольный), теоремы синусов и косинусов, формулы площадей, соотношения в прямоугольном треугольнике.
2. Отработать вычисление элементов треугольника (стороны, углы, медианы, биссектрисы, высоты, радиусы вписанной и описанной окружностей).
3. Систематизировать знания о четырёхугольниках (параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция), их свойствах и формулах площадей, включая описанные и вписанные четырёхугольники.
4. Отработать свойства окружности: вписанные и центральные углы, касательная, секущая, хорды, теоремы об отрезках пересекающихся хорд, о произведении отрезков касательной и секущей.

5. Научить решать планиметрические задачи на нахождение углов, длин, площадей, радиусов вписанных и описанных окружностей, в том числе комбинированные задачи.
6. Сформировать навыки решения доказательных задач с использованием геометрических теорем (параллельность, перпендикулярность, равенство отрезков и углов, подобие).
7. Обучить методам решения задач с использованием векторов и координат на плоскости.
8. Развить умение строить чертежи, анализировать геометрическую конфигурацию и выбирать рациональный метод решения.

Планируемые результаты освоения модуля 4

Обучающийся будет знать:

- Определения и свойства всех видов треугольников, четырёхугольников, окружностей и их элементов.
- Теоремы синусов и косинусов, формулы площадей треугольников и четырёхугольников (включая формулу Герона, через радиусы вписанной/описанной окружностей).
- Свойства вписанных и описанных углов, касательных, хорд, секущих; теоремы об отрезках пересекающихся хорд, о касательной и секущей.
- Признаки и свойства вписанных и описанных четырёхугольников.
- Формулы для правильных многоугольников.
- Основы координатного и векторного методов на плоскости.

Обучающийся будет уметь:

- Находить все элементы треугольника (углы, стороны, медианы, биссектрисы, высоты, радиусы) с использованием теорем и тригонометрических соотношений.
- Вычислять площади фигур различными способами (через основание и высоту, две стороны и угол, Герон, через радиусы, по координатам вершин).
- Решать задачи на окружность: находить углы, длины отрезков, радиусы, применять теоремы о касательных и секущих.
- Доказывать геометрические утверждения (параллельность, перпендикулярность, равенство, подобие) с использованием признаков и свойств.
- Применять координатный метод (расстояние между точками, уравнение прямой и окружности) и векторный метод (скалярное произведение, условия перпендикулярности и коллинеарности) для решения планиметрических задач.
- Строить чертежи по условию задачи и использовать их для анализа.

Учебный план модуля 4

Наименование тем		Всего	В том числе		Формы контроля и аттестации
			теория	практика	
Учебный кабинет	Тема 4.1. Треугольники. Теоремы синусов и косинусов	2	1	1	Текущий контроль

Учебный кабинет	Тема 4.2. Площади треугольников и многоугольников	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 4.3. Четырёхугольники (параллелограмм, трапеция и др.)	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 4.4. Окружность: углы, хорды, касательные, секущие	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 4.5. Вписанные и описанные многоугольники	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 4.6. Координатный и векторный методы в планиметрии	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Промежуточная аттестация по модулю 4	2	-	2	Промежуточная аттестация
	Итого:	14	6	8	

Календарный учебный график модуля 4

Наименование тем		Всего	В том числе		Учебная неделя, день недели
			теория	практика	
Учебный кабинет	Тема 4.1. Треугольники. Теоремы синусов и косинусов	2	1	1	7-я неделя, пятница
Учебный кабинет	Тема 4.2. Площади треугольников и многоугольников	2	1	1	8-я неделя, понедельник
Учебный кабинет	Тема 4.3. Четырёхугольники (параллелограмм, трапеция и др.)	2	1	1	8-я неделя, среда
Учебный кабинет	Тема 4.4. Окружность: углы, хорды, касательные, секущие	2	1	1	8-я неделя, пятница
Учебный кабинет	Тема 4.5. Вписанные и описанные многоугольники	2	1	1	9-я неделя, понедельник

Учебный кабинет	Тема 4.6. Координатный и векторный методы в планиметрии	2	1	1	9-я неделя, среда
Учебный кабинет	Промежуточная аттестация по модулю 4	2	-	2	9-я неделя, пятница
	Итого:	14	6	8	

Содержание модуля 4

Тема 4.1. Треугольники. Теоремы синусов и косинусов

Теория

Треугольник - одна из основных фигур планиметрии. В ЕГЭ задания № 1, 2, 17 часто связаны с вычислением элементов треугольника или использованием его свойств.

Основные элементы треугольника:

- Стороны: a, b, c (обычно противолежат углам A, B, C соответственно).
- Углы: $\angle A, \angle B, \angle C$; сумма углов равна 180° .
- Высота: перпендикуляр, опущенный из вершины на противоположную сторону (или её продолжение). Обозначается h_a, h_b, h_c .
- Медиана: отрезок, соединяющий вершину с серединой противоположной стороны. Медианы пересекаются в одной точке (центроид) и делятся в отношении 2:1 от вершины.
- Биссектриса: отрезок, делящий угол пополам. Биссектрисы пересекаются в центре вписанной окружности. Свойство биссектрисы: отношение отрезков, на которые она делит противоположную сторону, равно отношению прилежащих сторон: $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ (для биссектрисы из вершины A).
- Средняя линия: отрезок, соединяющий середины двух сторон, параллелен третьей стороне и равен её половине.

Виды треугольников:

- Прямоугольный: один угол 90° . Для него справедлива теорема Пифагора: $c^2 = a^2 + b^2$ (где c - гипотенуза). Тригонометрические соотношения: $\sin A = \frac{a}{c}$, $\cos A = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$.
- Равнобедренный: две стороны равны. Углы при основании равны. Медиана, проведённая к основанию, является высотой и биссектрисой.
- Равносторонний: все стороны равны, все углы по 60° . Высота $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, площадь $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, радиусы описанной $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$ и вписанной $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$ окружностей.

Теорема синусов: стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

где R - радиус описанной окружности. Эта теорема позволяет находить неизвестные стороны или углы, когда известны два угла и сторона, или две стороны и угол.

Теорема косинусов: квадрат любой стороны равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

и аналогично для других сторон. Теорема косинусов позволяет находить сторону по двум сторонам и углу между ними, а также углы по трём сторонам.

Соотношения в прямоугольном треугольнике (дополнительно):

- Высота, опущенная на гипотенузу, делит её на отрезки, связанные с катетами: $a^2 = c \cdot c_a$, $b^2 = c \cdot c_b$ (проекции катетов на гипотенузу), и $h^2 = c_a \cdot c_b$.
- Медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

Типичные ошибки: путают применение теорем синусов и косинусов; неправильно определяют, какой угол противолежит стороне; забывают, что для теоремы синусов нужна пара (сторона - противолежащий угол); при использовании теоремы косинусов не учитывают знак косинуса для тупых углов.

Примеры:

- В треугольнике ABC : $AB = 5$, $BC = 7$, $\angle B = 60^\circ$. Найти AC . По теореме косинусов: $AC^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos 60^\circ = 25 + 49 - 35 = 39$, $AC = \sqrt{39}$.
- Даны две стороны $a = 6$, $b = 8$ и угол $A = 30^\circ$. По теореме синусов находим $\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{8 \cdot 0.5}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, значит $B \approx 41.8^\circ$ (или $180 - 41.8$ - нужно проверить).

Практические задания

1. В треугольнике ABC $AB = 5$, $BC = 7$, угол $B = 60^\circ$. Найдите AC (по теореме косинусов).
2. В треугольнике ABC $AB = 6$, $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 45^\circ$. Найдите BC (по теореме синусов).
3. В прямоугольном треугольнике катеты равны 3 и 4. Найдите гипотенузу, площадь, радиусы вписанной и описанной окружностей.
4. Задание из ЕГЭ (№ 1): в треугольнике ABC $AC = 8$, $BC = 6$, $\angle C = 120^\circ$. Найдите AB .
5. Докажите, что в равнобедренном треугольнике медиана, проведённая к основанию, является высотой и биссектрисой.
6. Найдите сторону равностороннего треугольника, если его высота равна $6\sqrt{3}$.
7. В треугольнике со сторонами 5, 6, 7 найдите угол, противолежащий стороне 7 (по теореме косинусов).
8. Задание из ЕГЭ (№ 1): в треугольнике ABC $AB = \sqrt{3}$, $BC = 2$, $\angle C = 60^\circ$. Найдите $\angle A$.
9. В треугольнике ABC даны стороны $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$. Найдите угол A и радиус описанной окружности.

10. Докажите, что в любом треугольнике сумма квадратов медиан равна $\frac{3}{4}$ суммы квадратов сторон.

Тема 4.2. Площади треугольников и многоугольников

Теория

Умение вычислять площади фигур - основа для решения многих планиметрических задач. В ЕГЭ часто требуется найти площадь треугольника или четырёхугольника, используя различные формулы.

Формулы площади треугольника:

1. Через основание и высоту: $S = \frac{1}{2}ah_a$ (где a - любая сторона, h_a - соответствующая высота).
2. Через две стороны и угол между ними: $S = \frac{1}{2}ab \sin C$ (где a, b - стороны, C - угол между ними).
3. Формула Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$ - полупериметр.
4. Через радиус вписанной окружности: $S = pr$, где r - радиус вписанной окружности.
5. Через радиус описанной окружности: $S = \frac{abc}{4R}$, где R - радиус описанной окружности.
6. Площадь прямоугольного треугольника: $S = \frac{1}{2}ab$ (произведение катетов, делённое на 2).
7. Площадь по координатам вершин: $S = \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$ (формула площади через координаты).

Площади четырёхугольников:

- Прямоугольник: $S = ab$ (смежные стороны).
- Квадрат: $S = a^2$ (или $\frac{d^2}{2}$, где d - диагональ).
- Параллелограмм: $S = ah_a = ab \sin \alpha$ (где a - сторона, h_a - высота к ней, α - угол между соседними сторонами).
- Ромб: $S = ah = \frac{d_1 d_2}{2}$ (половина произведения диагоналей).
- Трапеция: $S = \frac{a+b}{2}h$ (полусумма оснований на высоту).
- Произвольный четырёхугольник: можно разбить диагональю на два треугольника и сложить их площади; или использовать формулу $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin \varphi$ (где d_1, d_2 - диагонали, φ - угол между ними).

Площади правильных многоугольников: $S = \frac{1}{2}Pr$ (где P - периметр, r - радиус вписанной окружности), или через радиус описанной окружности: $S = \frac{n}{2}R^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$.

Теорема о площадях подобных фигур: площади подобных фигур относятся как квадраты соответствующих линейных размеров (сторон, радиусов, высот).

Типичные ошибки: путают высоты для разных сторон; в формуле Герона неправильно вычисляют полупериметр; применяют формулу для параллелограмма как для прямоугольника; забывают переводить углы в радианы при использовании тригонометрических функций в калькуляторе.

Практические задания

1. Найдите площадь треугольника со сторонами 13, 14, 15 (по Герону).
2. В треугольнике две стороны равны 5 и 8, а угол между ними равен 60° . Найдите площадь.
3. Площадь треугольника равна 30, одна сторона равна 10, высота к ней равна 6. Верно ли? Обоснуйте.
4. Найдите площадь ромба с диагоналями 12 и 16.
5. В трапеции основания равны 6 и 10, высота равна 4. Найдите площадь.
6. Задание из ЕГЭ (№ 1): найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 4 и 8, а угол между ними равен 30° .
7. Площадь параллелограмма равна 48, одна сторона 8, а угол между сторонами 30° . Найдите другую сторону.
8. Докажите, что медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.
9. Найдите площадь четырёхугольника с вершинами $A(1; 2)$, $B(4; 6)$, $C(7; 2)$, $D(4; -2)$ (используя формулу площади по координатам или разбиение).
10. В треугольнике ABC стороны $AB = 8$, $BC = 10$, $AC = 12$. Найдите площадь и радиус вписанной окружности.

Тема 4.3. Четырёхугольники (параллелограмм, трапеция и др.)

Теория

Четырёхугольники - часто встречающиеся фигуры в задачах ЕГЭ. Важно знать их определения, свойства и формулы.

Параллелограмм: четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

- Свойства: противоположные стороны равны и параллельны; противоположные углы равны; диагонали точкой пересечения делятся пополам; сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех сторон: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

Прямоугольник: параллелограмм, у которого все углы прямые.

- Свойства: диагонали равны; все свойства параллелограмма.
- Периметр: $P = 2(a + b)$, площадь $S = ab$.

Ромб: параллелограмм, у которого все стороны равны.

- Свойства: диагонали взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами углов; диагонали делят ромб на четыре равных прямоугольных треугольника.
- Площадь: $S = ah = \frac{d_1 d_2}{2}$.

Квадрат: прямоугольник с равными сторонами (или ромб с прямыми углами).

- Свойства: все стороны равны, все углы прямые, диагонали равны, перпендикулярны и делят углы пополам.
- Площадь: $S = a^2$, диагональ $d = a\sqrt{2}$.

Трапеция: четырёхугольник, у которого две стороны параллельны (основания), а две другие - не параллельны (боковые стороны).

- Равнобедренная трапеция: боковые стороны равны; углы при основаниях равны; диагонали равны.
- Прямоугольная трапеция: одна боковая сторона перпендикулярна основаниям.
- Средняя линия трапеции: отрезок, соединяющий середины боковых сторон, параллельна основаниям и равна их полусумме: $m = \frac{a+b}{2}$.
- Площадь: $S = \frac{a+b}{2}h$; также через среднюю линию: $S = mh$.

Признаки параллелограмма: если в четырёхугольнике:

- обе пары противоположных сторон параллельны, или
- одна пара сторон параллельна и равна, или
- диагонали делятся точкой пересечения пополам, или
- противоположные углы равны, то это параллелограмм.

Признаки прямоугольника: параллелограмм с прямым углом, или с равными диагоналями.

Признаки ромба: параллелограмм с равными сторонами, или с перпендикулярными диагоналями, или диагональ делит угол пополам.

Типичные ошибки: путают свойства разных четырёхугольников; неправильно применяют формулы площадей; не учитывают, что в равнобедренной трапеции высота, опущенная из вершины тупого угла, делит основание на отрезки, равные полуразности оснований.

Практические задания

1. В параллелограмме стороны равны 6 и 8, угол между ними 60° . Найдите диагонали.
2. В ромбе сторона равна 10, а одна из диагоналей равна 12. Найдите другую диагональ и площадь.
3. В прямоугольнике диагональ равна 10, а одна сторона равна 6. Найдите периметр и площадь.
4. В трапеции основания равны 8 и 14, боковые стороны равны 5 и 7. Найдите высоту (если возможно) и площадь.
5. Докажите, что в равнобедренной трапеции углы при основаниях равны.
6. Задание из ЕГЭ (№ 1): в параллелограмме $ABCD$ $AB = 5$, $AD = 7$, $\angle A = 120^\circ$. Найдите диагональ BD .
7. Средняя линия трапеции равна 10, а одно из оснований на 4 больше другого. Найдите основания.
8. В прямоугольнике точка пересечения диагоналей находится на расстоянии 3 и 4 от сторон. Найдите периметр прямоугольника.

9. Докажите, что если в четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны, то в него можно вписать окружность (теорема об описанном четырёхугольнике - подготовка к теме 4.5).
10. В ромбе угол между стороной и диагональю равен 30° . Найдите углы ромба.

Тема 4.4. Окружность: углы, хорды, касательные, секущие

Теория

Окружность - одна из важнейших фигур в планиметрии. Задачи с окружностями часто встречаются в ЕГЭ (№ 2, 17).

Основные понятия:

- Центр O - точка, равноудалённая от всех точек окружности.
- Радиус R - отрезок от центра до любой точки окружности.
- Хорда - отрезок, соединяющий две точки окружности.
- Диаметр - хорда, проходящая через центр, $d = 2R$.
- Дуга - часть окружности между двумя точками.
- Центральный угол - угол с вершиной в центре. Он равен градусной мере дуги, на которую опирается.
- Вписанный угол - угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность. Он равен половине градусной меры дуги, на которую опирается. Следствия: вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны; угол, опирающийся на диаметр, равен 90° .

Касательная к окружности: прямая, имеющая с окружностью ровно одну общую точку.

- Свойство: касательная перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.
- Отрезки касательных, проведённых из одной внешней точки к окружности, равны.

Секущая: прямая, пересекающая окружность в двух точках.

Теоремы об отрезках:

- О пересекающихся хордах: если хорды AB и CD пересекаются в точке E , то $AE \cdot EB = CE \cdot ED$.
- О касательной и секущей: если из точки A проведены касательная AB (точка касания B) и секущая ACD (точки пересечения с окружностью C и D), то $AB^2 = AC \cdot AD$ (произведение всей секущей на её внешнюю часть).
- О двух секущих: если из точки A проведены две секущие ACD и AEF , то $AC \cdot AD = AE \cdot AF$.

Угол между касательной и хордой равен половине дуги, заключённой внутри этого угла.

Угол между двумя касательными (из одной точки) равен 180° минус градусная мера меньшей дуги, заключённой между точками касания.

Типичные ошибки: путают центральный и вписанный углы; неправильно определяют дугу, на которую опирается угол; забывают, что вписанный угол, опирающийся на

диаметр, прямой; неправильно применяют теорему о касательной и секущей (путают, какой отрезок брать как внешнюю часть).

Практические задания

1. Найдите вписанный угол, если центральный угол, опирающийся на ту же дугу, равен 120° .
2. В окружности хорды AB и CD пересекаются в точке E . $AE = 4$, $EB = 6$, $CE = 3$. Найдите ED .
3. Из точки A к окружности проведена касательная AB (B - точка касания) и секущая ACD (C - между A и D). $AB = 6$, $AC = 4$. Найдите AD .
4. Задание из ЕГЭ (№ 2): хорда AB делится точкой C на отрезки $AC = 8$ и $CB = 12$, а хорда DE - в отношении 2:3. Найдите DE , если известно, что C - точка пересечения хорд.
5. Докажите, что угол между касательной и хордой, проведённой через точку касания, равен половине дуги, заключённой внутри этого угла.
6. Найдите радиус окружности, если угол между двумя касательными, проведёнными из одной точки, равен 60° , а расстояние от центра до точки пересечения касательных равно 10.
7. В окружности с центром O проведены диаметр AB и хорда AC . $\angle BAC = 30^\circ$. Найдите $\angle BOC$.
8. Задание из ЕГЭ (№ 2): через точку A проведены касательная AB и секущая ACD . $AB = 8$, $AC = 4$. Найдите CD .
9. В окружности радиусом 5 проведена хорда длиной 6. Найдите расстояние от центра до хорды.
10. Докажите, что если две хорды пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой (теорема о пересекающихся хордах).

Тема 4.5. Вписанные и описанные многоугольники

Теория

Многоугольники, вписанные в окружность или описанные около неё, обладают важными свойствами, которые часто используются в задачах ЕГЭ.

Вписанный многоугольник - все его вершины лежат на одной окружности (описанной около него).

Теорема о вписанном четырёхугольнике: сумма противоположных углов вписанного четырёхугольника равна 180° . Обратно: если в четырёхугольнике сумма противоположных углов равна 180° , то около него можно описать окружность.

Описанный многоугольник - все его стороны касаются одной окружности (вписанной в него).

Теорема об описанном четырёхугольнике: суммы длин противоположных сторон описанного четырёхугольника равны. Обратно: если в четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны, то в него можно вписать окружность.

Центр вписанной окружности - точка пересечения биссектрис углов многоугольника (для любого многоугольника, в который можно вписать окружность).

Центр описанной окружности - точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам.

Правильные многоугольники: все стороны и все углы равны. Для них существуют формулы:

- Центральный угол $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$.
- Сторона $a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$.
- Апофема (радиус вписанной окружности) $r = R \cos \frac{180^\circ}{n}$.
- Площадь $S = \frac{1}{2}nar = \frac{n}{2}R^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$.

Вписанные треугольники: для любого треугольника существует описанная окружность (центр - пересечение серединных перпендикуляров). Радиус $R = \frac{abc}{4S}$.

Описанные треугольники: для любого треугольника существует вписанная окружность (центр - пересечение биссектрис). Радиус $r = \frac{S}{p}$, где p - полупериметр.

Типичные ошибки: забывают, что во вписанном четырёхугольнике сумма противоположных углов равна 180° , а не 90° ; путают условия для вписанного и описанного четырёхугольников; неправильно применяют формулы для правильных многоугольников (например, путают R и r).

Практические задания

1. Найдите углы вписанного четырёхугольника, если один из углов равен 70° , а противоположный ему - 110° . Что можно сказать о других углах?
2. Можно ли описать окружность около четырёхугольника с углами $80^\circ, 100^\circ, 90^\circ, 90^\circ$?
3. В четырёхугольник со сторонами 5, 7, 9, 11 можно вписать окружность? Если да, то найдите четвёртую сторону, если известны три.
4. Найдите сторону правильного шестиугольника, если радиус описанной окружности равен 6.
5. Задание из ЕГЭ (№ 2): около окружности описана трапеция с основаниями 6 и 10. Найдите периметр трапеции.
6. Докажите, что в любом треугольнике центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис.
7. Найдите радиус вписанной окружности в прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4.
8. Найдите площадь правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса R .
9. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$, $\angle A = 80^\circ$, $\angle B = 100^\circ$. Найдите $\angle C$ и $\angle D$.

10. Докажите, что если в четырёхугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны (обратная теорема).

Тема 4.6. Координатный и векторный методы в планиметрии

Теория

Координатный и векторный методы позволяют решать геометрические задачи алгебраически, что часто упрощает решение, особенно в задачах с углами, расстояниями и доказательствами.

Координатный метод:

- Задаётся прямоугольная система координат (обычно оси совмещают с удобными прямыми).
- Каждая точка задаётся парой чисел $(x; y)$.
- Расстояние между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
- Координаты середины отрезка $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.
- Уравнение прямой: $y = kx + b$ или общее $Ax + By + C = 0$.
- Условие параллельности прямых: $k_1 = k_2$ (для угловых коэффициентов) или $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.
- Условие перпендикулярности: $k_1 \cdot k_2 = -1$ или $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.
- Уравнение окружности с центром $(x_0; y_0)$ и радиусом R : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.
- Расстояние от точки $(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Векторный метод:

- Вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $(x_B - x_A; y_B - y_A)$.
- Длина вектора: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- Скалярное произведение векторов: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$, где θ - угол между векторами.
- Условие перпендикулярности векторов: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
- Условие коллинеарности: $\vec{a} = k\vec{b}$ (или $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$ при $x_2y_2 \neq 0$).
- Угол между векторами: $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$.

Применение: эти методы особенно эффективны при доказательстве параллельности, перпендикулярности, нахождении углов, расстояний, решении задач с медианами, биссектрисами, а также в комбинированных задачах.

Типичные ошибки: неправильный выбор системы координат (усложняет вычисления); ошибки в арифметике при вычислении расстояний; забывают модуль при вычислении расстояния от точки до прямой; путают скалярное произведение и координаты векторов.

Практические задания

1. Найдите расстояние между точками $A(2; -1)$ и $B(-; 13)$.
2. Найдите координаты середины отрезка AB , если $A(-; 34)$, $B(5; -2)$.
3. Даны векторы $\vec{a}(3; -2)$ и $\vec{b}(1; 4)$. Найдите их скалярное произведение и угол между ними.
4. Проверьте, перпендикулярны ли векторы $\vec{a}(2; -1)$ и $\vec{b}(1; 2)$.
5. Задание из ЕГЭ (№ 17): в прямоугольной системе координат даны точки $A(1; 2)$, $B(4; 6)$, $C(7; 2)$. Найдите длину медианы AM и угол ABC (координатным методом).
6. Найдите уравнение окружности с центром в точке $(2; -3)$ и радиусом 5.
7. Определите, лежит ли точка $D(3; 4)$ на окружности $x^2 + y^2 = 25$.
8. Векторным методом докажите, что диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.
9. Найдите расстояние от точки $M(1; 2)$ до прямой $3x + 4y - 5 = 0$.
10. Даны точки $A(0; 0)$, $B(4; 0)$, $C(2; 2\sqrt{3})$. Найдите угол $\angle ABC$ с помощью скалярного произведения.

7. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА МОДУЛЯ 5

СТЕРЕОМЕТРИЯ

Цель модуля: формирование и углубление знаний о пространственных фигурах, развитие пространственного воображения и навыков решения стереометрических задач на вычисление объёмов, площадей поверхностей, расстояний и углов, а также доказательных задач, соответствующих заданиям № 3 и 14 ЕГЭ профильного уровня.

Задачи модуля:

1. Систематизировать свойства многогранников: призма (прямая, правильная, наклонная), параллелепипед (прямоугольный, куб), пирамида (правильная, усечённая), а также их элементов (рёбра, грани, диагонали, высоты, апофемы).
2. Отработать формулы объёмов и площадей полной и боковой поверхностей для призм, пирамид, цилиндров, конусов и шаров, включая усечённые фигуры.
3. Научить строить сечения многогранников плоскостью (метод следов, метод вспомогательных сечений) и вычислять площади сечений.
4. Сформировать навыки нахождения расстояний и углов в пространстве: от точки до плоскости, между скрещивающимися прямыми, между прямой и плоскостью, между плоскостями.
5. Обучить координатному и векторному методам в стереометрии, включая составление уравнений плоскостей и вычисление расстояний по формулам.
6. Развить пространственное воображение через построение чертежей и анализ взаимного расположения фигур.
7. Отработать решение стереометрических задач из ЕГЭ (№ 14) с полным обоснованием и оформлением.

Планируемые результаты освоения модуля 5

Обучающийся будет знать:

- Определения и свойства призмы, параллелепипеда, куба, пирамиды, цилиндра, конуса, шара (включая усечённые формы).
- Формулы объёмов и площадей поверхностей всех изученных тел.
- Алгоритмы построения сечений многогранников и методы вычисления их площадей.
- Формулы для вычисления расстояний: от точки до плоскости, между скрещивающимися прямыми, между параллельными плоскостями.
- Формулы для вычисления углов: между прямыми, между прямой и плоскостью, между плоскостями.
- Основы координатного и векторного методов: координаты векторов, скалярное и векторное произведение, уравнение плоскости, нормаль.

Обучающийся будет уметь:

- Вычислять объёмы и площади поверхностей многогранников и тел вращения по известным элементам.
- Строить сечения многогранников, используя различные методы, и находить их площади.
- Находить расстояние от точки до плоскости, между скрещивающимися прямыми, между прямой и плоскостью (в том числе координатным методом).
- Находить углы между прямыми, прямой и плоскостью, плоскостями (в том числе координатным методом).
- Применять координатный метод для решения стереометрических задач: задавать координаты точек, находить уравнения плоскостей, вычислять расстояния и углы по формулам.
- Оформлять решения заданий с развёрнутым ответом, сопровождая чертежами и обоснованиями.

Учебный план модуля 5

Наименование тем		Всего	В том числе		Формы контроля и аттестации
			теория	практика	
Учебный кабинет	Тема 5.1. Многогранники: призма, параллелепипед, куб	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 5.2. Пирамида. Объёмы и площади поверхностей многогранников	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 5.3. Тела вращения: цилиндр, конус, шар	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 5.4. Сечения многогранников	2	1	1	Текущий контроль

Учебный кабинет	Тема 5.5. Расстояния и углы в пространстве	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 5.6. Координатный и векторный методы в стереометрии	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Промежуточная аттестация по модулю 5	2	-	2	Промежуточная аттестация
	Итого:	14	6	8	

Календарный учебный график модуля 5

Наименование тем		Всего	В том числе		Учебная неделя, день недели
			теория	практика	
Учебный кабинет	Тема 5.1. Многогранники: призма, параллелепипед, куб	2	1	1	10-я неделя, понедельник
Учебный кабинет	Тема 5.2. Пирамида. Объёмы и площади поверхностей многогранников	2	1	1	10-я неделя, среда
Учебный кабинет	Тема 5.3. Тела вращения: цилиндр, конус, шар	2	1	1	10-я неделя, пятница
Учебный кабинет	Тема 5.4. Сечения многогранников	2	1	1	11-я неделя, понедельник
Учебный кабинет	Тема 5.5. Расстояния и углы в пространстве	2	1	1	11-я неделя, среда
Учебный кабинет	Тема 5.6. Координатный и векторный методы в стереометрии	2	1	1	11-я неделя, пятница
Учебный кабинет	Промежуточная аттестация по модулю 5	2	-	2	12-я неделя, понедельник
	Итого:	14	6	8	

Содержание модуля 5

Тема 5.1. Многогранники: призма, параллелепипед, куб

Теория

Призма - многогранник, две грани которого (основания) являются равными многоугольниками, лежащими в параллельных плоскостях, а все остальные грани (боковые) - параллелограммы. Боковые рёбра призмы параллельны и равны.

- Прямая призма - боковые рёбра перпендикулярны основаниям. В этом случае боковые грани - прямоугольники, а высота равна боковому ребру.

- Наклонная призма - боковые рёбра не перпендикулярны основаниям.
- Правильная призма - прямая призма, в основании которой лежит правильный многоугольник (все стороны и углы равны). Например, правильная треугольная, четырёхугольная (в основании квадрат), шестиугольная призмы.
- Параллелепипед - призма, основания которой - параллелограммы. Все шесть граней - параллелограммы. Противоположные грани равны и параллельны.
- Прямоугольный параллелепипед - параллелепипед, у которого все грани - прямоугольники (основания - прямоугольники, боковые рёбра перпендикулярны основаниям).
- Куб - прямоугольный параллелепипед, все рёбра которого равны. Все грани - квадраты.

Основные формулы:

- Объём любой призмы: $V = S_{\text{осн}} \cdot h$, где h - высота (расстояние между плоскостями оснований).
- Площадь боковой поверхности прямой призмы: $S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} \cdot l$, где l - боковое ребро (оно же высота для прямой призмы). Для наклонной призмы $S_{\text{бок}} = P_{\text{перп}} \cdot l$, где $P_{\text{перп}}$ - периметр перпендикулярного сечения.
- Площадь полной поверхности: $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$.

Для прямоугольного параллелепипеда с измерениями a, b, c :

- $V = abc$.
- $S_{\text{полн}} = 2(ab + bc + ac)$.
- Диагональ $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Для куба со стороной a :

- $V = a^3$.
- $S_{\text{полн}} = 6a^2$.
- Диагональ куба $d = a\sqrt{3}$.

Свойства диагоналей параллелепипеда: все четыре диагонали пересекаются в одной точке и делятся пополам. В прямоугольном параллелепипеде все диагонали равны.

Свойства призмы: противоположные боковые грани параллельны и равны (в прямой призме - прямоугольники). Сечение призмы плоскостью, параллельной основаниям, даёт многоугольник, равный основанию.

Типичные ошибки: путают высоту и боковое ребро в наклонной призме; неправильно вычисляют площадь боковой поверхности (используют периметр основания, а не периметр перпендикулярного сечения); забывают, что в прямоугольном параллелепипеде диагональ вычисляется по трём измерениям.

Примеры вычислений:

- В прямой треугольной призме стороны основания 3,4,5 (прямоугольный треугольник), высота 6. Объём: $S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$, $V = 6 \cdot 6 = 36$. Боковая поверхность: $P_{\text{осн}} = 3 + 4 + 5 = 12$, $S_{\text{бок}} = 12 \cdot 6 = 72$. $S_{\text{полн}} = 72 + 2 \cdot 6 = 84$.

- В прямоугольном параллелепипеде $a = 3, b = 4, c = 12$. Диагональ $d = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13$. $V = 3 \cdot 4 \cdot 12 = 144$.

Практические задания

1. В прямой призме с основанием - треугольник со сторонами 3, 4, 5 и высотой 6. Найдите объём и площадь полной поверхности.
2. В прямоугольном параллелепипеде $a = 3, b = 4, c = 12$. Найдите диагональ и объём.
3. Куб имеет объём 125. Найдите его ребро и площадь полной поверхности.
4. Задание из ЕГЭ (№ 3): в правильной четырёхугольной призме сторона основания равна 4, а высота равна 6. Найдите диагональ призмы.
5. Докажите, что в любой призме все боковые рёбра равны.
6. Найдите объём наклонной призмы, если площадь основания равна 10, а высота равна 5.
7. Площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы равна 72, а сторона основания равна 4. Найдите высоту.
8. Сравните объёмы двух параллелепипедов с одинаковыми основаниями, если высоты равны 3 и 5.
9. В прямоугольном параллелепипеде диагональ равна 13, а два измерения равны 3 и 4. Найдите третье измерение.
10. В правильной шестиугольной призме все рёбра равны 2. Найдите объём и площадь боковой поверхности.

Тема 5.2. Пирамида. Объёмы и площади поверхностей многогранников

Теория

Пирамида - многогранник, у которого одна грань (основание) - произвольный многоугольник, а остальные грани (боковые) - треугольники с общей вершиной (вершиной пирамиды). Высота пирамиды - перпендикуляр, опущенный из вершины на плоскость основания.

- Правильная пирамида - в основании лежит правильный многоугольник, а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника (центром вписанной и описанной окружностей). В правильной пирамиде все боковые рёбра равны, все боковые грани - равные равнобедренные треугольники. Апофема - высота боковой грани, проведённая из вершины пирамиды.
- Усечённая пирамида - часть пирамиды, заключённая между основанием и плоскостью, параллельной основанию, пересекающей пирамиду. Основания усечённой пирамиды - подобные многоугольники, боковые грани - трапеции.

Формулы:

- Объём пирамиды: $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$.
- Площадь боковой поверхности правильной пирамиды: $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot l$, где l - апофема.

- Площадь полной поверхности: $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$.
- Объём усечённой пирамиды: $V = \frac{1}{3}h(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$, где S_1, S_2 - площади оснований.
- Связь между объёмами подобных пирамид: если пирамида рассечена плоскостью, параллельной основанию, то площади сечений и объёмы частей относятся как квадраты (для площадей) и кубы (для объёмов) соответствующих линейных размеров.

Свойства правильной пирамиды:

- Все боковые рёбра равны.
- Все боковые грани - равные равнобедренные треугольники.
- Высота проходит через центр основания.
- Апофема l связана с высотой h и радиусом вписанной в основание окружности r : $l^2 = h^2 + r^2$.

Тетраэдр - треугольная пирамида. Если все рёбра равны, то это правильный тетраэдр. Для него:

- $V = \frac{a^3}{6\sqrt{2}}$, $h = a\sqrt{\frac{2}{3}}$, $R = a\sqrt{\frac{3}{8}}$ (описанная сфера), $r = a\sqrt{\frac{1}{24}}$ (вписанная сфера).

Типичные ошибки: путают высоту пирамиды и апофему; забывают коэффициент $1/3$ в объёме; неправильно вычисляют площадь основания, если оно неправильное; в усечённой пирамиде используют неправильную формулу для объёма.

Примеры:

- Правильная четырёхугольная пирамида: сторона основания $a = 6$, высота $h = 4$. Найти объём и площадь боковой поверхности. $S_{\text{осн}} = 6^2 = 36$, $V = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 4 = 48$. Апофема: $r = a/2 = 3$ (радиус вписанной в квадрат), $l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$. $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot 6) \cdot 5 = 60$.

Практические задания

1. В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания равна 6, высота равна 4. Найдите объём и площадь боковой поверхности.
2. В треугольной пирамиде все рёбра равны a . Найдите объём (используйте формулу для правильного тетраэдра).
3. Задание из ЕГЭ (№ 3): в правильной треугольной пирамиде сторона основания равна $6\sqrt{3}$, а боковое ребро равно 10. Найдите высоту пирамиды.
4. Объём пирамиды равен 60, площадь основания равна 20. Найдите высоту.
5. В правильной четырёхугольной пирамиде апофема равна 5, а сторона основания равна 6. Найдите высоту пирамиды.
6. Усечённая пирамида имеет основания 4 и 9, высота 6. Найдите объём.
7. Докажите, что объём пирамиды с вершиной в центре основания правильной призмы равен половине объёма призмы.
8. Найдите площадь полной поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, если сторона основания равна 8, а высота равна 3.

9. В правильной треугольной пирамиде апофема равна 6, а двугранный угол при основании равен 60° . Найдите высоту и объём.
10. Пирамида рассечена плоскостью, параллельной основанию, на две части с объёмами V_1 и V_2 (V_1 - меньшая часть). Найдите отношение площадей оснований, если отношение высот равно 2:3.

Тема 5.3. Тела вращения: цилиндр, конус, шар

Теория

Цилиндр - тело, образованное вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон. Основания - два равных круга, лежащие в параллельных плоскостях. Боковая поверхность - прямоугольник (в развёртке). Высота h - расстояние между основаниями (равна образующей для прямого цилиндра). Радиус основания R .

- $V = \pi R^2 h$.
- $S_{\text{бок}} = 2\pi R h$.
- $S_{\text{полн}} = 2\pi R(R + h)$.

Конус - тело, образованное вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов. Основание - круг, вершина - точка, не лежащая в плоскости основания. Образующая l - отрезок, соединяющий вершину с любой точкой окружности основания. Высота h - перпендикуляр из вершины на плоскость основания. Связь: $l^2 = R^2 + h^2$.

- $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$.
- $S_{\text{бок}} = \pi R l$.
- $S_{\text{полн}} = \pi R(R + l)$.

Усечённый конус - часть конуса между основанием и сечением, параллельным основанию. Радиусы оснований R_1 и R_2 ($R_1 > R_2$), высота h , образующая l . Связь: $l^2 = h^2 + (R_1 - R_2)^2$.

- $V = \frac{1}{3}\pi h(R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2)$.
- $S_{\text{бок}} = \pi(R_1 + R_2)l$.

Шар - тело, образованное вращением полукруга вокруг диаметра. Все точки поверхности (сферы) равноудалены от центра на расстояние R (радиус шара).

- $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.
- $S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2$.

Шаровой сегмент, сектор, слой - дополнительные формулы, но в базовом курсе ЕГЭ они встречаются редко; достаточно знать объём шара и площадь сферы.

Вписанные и описанные тела: часто встречаются задачи на вписанный в конус цилиндр, вписанный в шар куб и т.д. Для решения нужно выражать размеры через одну переменную и использовать подобие.

Типичные ошибки: путают формулы для цилиндра и конуса (забывают коэффициент $1/3$ для конуса); неправильно определяют образующую у конуса; забывают, что в усечённом конусе образующая связана с разностью радиусов.

Примеры:

- Цилиндр: $R = 3, h = 8. V = \pi \cdot 9 \cdot 8 = 72\pi. S_{\text{бок}} = 2\pi \cdot 3 \cdot 8 = 48\pi.$
- Конус: $R = 4, h = 3. l = \sqrt{16 + 9} = 5. V = \frac{1}{3}\pi \cdot 16 \cdot 3 = 16\pi. S_{\text{бок}} = \pi \cdot 4 \cdot 5 = 20\pi.$
- Шар: $V = 36\pi \Rightarrow R^3 = 27 \Rightarrow R = 3, S = 4\pi \cdot 9 = 36\pi.$

Практические задания

1. В цилиндре радиус основания равен 3, высота равна 8. Найдите объём и площадь полной поверхности.
2. В конусе радиус основания равен 4, высота равна 3. Найдите объём и образующую.
3. Задание из ЕГЭ (№ 3): диаметр основания цилиндра равен 12, высота равна 8. Найдите площадь боковой поверхности.
4. Шар имеет объём 36π . Найдите его радиус и площадь поверхности.
5. В цилиндре проведено осевое сечение - квадрат со стороной 6. Найдите объём цилиндра.
6. В конусе угол при вершине осевого сечения равен 60° , а образующая равна 6. Найдите радиус основания и высоту.
7. Усечённый конус имеет радиусы оснований 2 и 6, высота 4. Найдите объём и образующую.
8. Во сколько раз объём шара больше объёма вписанного в него куба?
9. В конус вписан цилиндр так, что его верхнее основание касается боковой поверхности конуса, а нижнее лежит в плоскости основания конуса. Радиус конуса R , высота H . Найдите максимальный объём цилиндра (задача на оптимизацию - используйте подобие и производную).
10. Шар вписан в цилиндр (касается оснований и боковой поверхности). Найдите отношение объёмов шара и цилиндра.

Тема 5.4. Сечения многогранников

Теория

Сечение многогранника плоскостью - это многоугольник, получающийся в пересечении плоскости с поверхностью многогранника. Построение сечений - важный навык для задач ЕГЭ (часто в № 14 требуется построить сечение и найти его площадь или периметр).

Методы построения сечений:

1. Метод следов: строится линия пересечения секущей плоскости с плоскостью какой-либо грани (след). Для этого находят точки пересечения секущей плоскости с рёбрами многогранника. Если секущая плоскость пересекает грань по прямой,

то эта прямая является следом на грани. Соединяя точки пересечения на рёбрах, получаем сечение.

2. Метод параллельных прямых: если секущая плоскость параллельна некоторой прямой (например, ребру), то линия пересечения с гранью будет параллельна этой прямой.
3. Метод вспомогательных сечений: используется, когда сложно найти все точки пересечения; строят вспомогательное сечение, а затем достраивают.

Важные правила:

- Если две точки сечения лежат в одной грани, то отрезок, их соединяющий, лежит в этой грани.
- Если секущая плоскость пересекает две параллельные грани, то линии пересечения параллельны.
- Если секущая плоскость проходит через ребро, то сечение содержит это ребро.

Площадь сечения: часто находится как площадь многоугольника. Для правильных многогранников сечение может быть треугольником, четырёхугольником, шестиугольником и т.д. Площадь можно вычислить, разбив на треугольники, или используя формулу площади проекции: $S_{\text{сеч}} = \frac{S_{\text{проекции}}}{\cos \alpha}$, где α - угол между плоскостями.

Типичные ошибки: неправильное определение точек пересечения из-за неверного чертежа; забывают, что линия пересечения двух плоскостей - прямая; путают, какие точки соединять; неправильно находят углы при вычислении площади проекции.

Пример: в кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром a построить сечение плоскостью, проходящей через точки M, N, P - середины рёбер AB, AD, AA_1 соответственно. Сечение - треугольник MNP . Его стороны: $MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (диагональ квадрата со стороной $a/2$), аналогично другие. Площадь можно найти как равносторонний треугольник (на самом деле MNP - равносторонний со стороной $a\sqrt{2}/2$), площадь равна $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}a^2}{8}$.

Практические задания

1. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через три вершины. Найдите площадь сечения, если ребро куба равно a .
2. В правильной четырёхугольной пирамиде постройте сечение плоскостью, проходящей через вершину и середины двух противоположных рёбер основания.
3. Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через диагональ основания и вершину, если ребро куба равно 4.
4. Задание из ЕГЭ (№ 14): в правильной треугольной призме постройте сечение плоскостью, проходящей через середины трёх рёбер, и найдите его площадь.
5. Докажите, что если секущая плоскость параллельна основанию призмы, то сечение равно основанию.
6. В прямоугольном параллелепипеде с измерениями 3, 4, 5 найдите площадь диагонального сечения (проходящего через диагональ основания и противоположное ребро).

7. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через три точки на рёбрах, заданных отношениями (например, $AE:EB = 1:2$, $AF:FC = 1:1$, $AD:DT = 2:1$).
8. В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны. Постройте сечение плоскостью, проходящей через вершину и две точки на противоположных рёбрах основания, и найдите его площадь.
9. В кубе постройте сечение плоскостью, проходящей через центр грани и две вершины, и найдите периметр сечения.
10. Площадь сечения куба плоскостью, проходящей через три вершины, равна $8\sqrt{3}$. Найдите ребро куба.

Тема 5.5. Расстояния и углы в пространстве

Теория

Вычисление расстояний и углов - ключевая часть стереометрических задач. В ЕГЭ (№ 14) часто требуется найти угол между прямой и плоскостью или расстояние от точки до плоскости.

Расстояние от точки до плоскости - длина перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость. Если плоскость задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, то расстояние от точки $M(x_0; y_0; z_0)$ вычисляется по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

В геометрическом методе - через объём пирамиды: расстояние от точки до плоскости равно $\frac{3V}{S}$, где V - объём пирамиды с вершиной в этой точке и основанием в данной плоскости.

Расстояние между скрещивающимися прямыми - длина их общего перпендикуляра (или расстояние между параллельными плоскостями, в которых они лежат). Можно найти через объём параллелепипеда: для векторов $\vec{a}$ (направляющий первой прямой), $\vec{b}$ (направляющий второй), и $\vec{c}$ - вектора, соединяющего точки на прямых, расстояние

$$d = \frac{|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}.$$

Также можно использовать координатный метод: найти плоскости, содержащие прямые и параллельные друг другу.

Расстояние между параллельными плоскостями - расстояние от любой точки одной плоскости до другой.

Угол между прямыми - угол между их направляющими векторами (всегда от 0 до 90°).

Находится через скалярное произведение: $\cos \varphi = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$.

Угол между прямой и плоскостью - угол между прямой и её проекцией на плоскость (или дополнительный угол до 90°). Через векторы: $\sin \theta = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}| |\vec{n}|}$, где $\vec{s}$ - направляющий

вектор прямой, $\vec{n}$ - нормаль плоскости. Если θ - искомый угол, то $\theta = \arcsin(\text{этого отношения})$.

Угол между плоскостями - угол между их нормальными (или двугранный угол). $\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$.

Типичные ошибки: путают угол между прямой и плоскостью с углом между прямой и нормалью; в формулах для расстояний забывают модуль; неправильно определяют направляющие векторы для скрещивающихся прямых.

Примеры:

- В кубе с ребром a найти расстояние от вершины до диагонали противоположной грани. Можно координатным методом.
- Найти угол между ребром A_1B и плоскостью BCC_1 в кубе. Используем координаты.

Практические задания

1. В кубе с ребром a найдите расстояние от вершины до диагонали противоположной грани.
2. В правильной треугольной призме найдите угол между ребром основания и диагональю боковой грани.
3. Задание из ЕГЭ (№ 14): в кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между прямой A_1B и плоскостью BCC_1 .
4. В тетраэдре с ребром a найдите расстояние между скрещивающимися рёбрами.
5. Найдите расстояние от точки $M(1; 2; 3)$ до плоскости $2x - y + 2z - 4 = 0$.
6. В правильной четырёхугольной пирамиде найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания.
7. В прямоугольном параллелепипеде найдите угол между диагональю и плоскостью основания.
8. Докажите, что в кубе диагональ перпендикулярна плоскости, проходящей через диагональ основания и вершину.
9. В правильной треугольной пирамиде все рёбра равны a . Найдите угол между боковой гранью и плоскостью основания.
10. В кубе найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями двух соседних граней (например, A_1B и BC_1).

Тема 5.6. Координатный и векторный методы в стереометрии

Теория

Координатный метод является мощным инструментом для решения стереометрических задач, особенно когда геометрическая конструкция сложна для чисто геометрического подхода. В ЕГЭ (№ 14) часто разрешается использовать координатный метод.

Основные формулы в пространстве:

- Расстояние между точками: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.
- Координаты середины отрезка: $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

- Скалярное произведение векторов: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$.
- Векторное произведение: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$. Векторное произведение даёт вектор, перпендикулярный обоим, с длиной, равной площади параллелограмма, построенного на векторах. Используется для нахождения нормали к плоскости.
- Уравнение плоскости: $Ax + By + Cz + D = 0$, где $(A; B; C)$ - нормальный вектор к плоскости. Чтобы найти уравнение, нужно подставить координаты трёх точек, лежащих в плоскости, и решить систему.
- Расстояние от точки до плоскости: формула приведена в теме 5.5.
- Угол между прямой и плоскостью: $\sin \theta = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}| |\vec{n}|}$.
- Угол между плоскостями: $\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$.
- Расстояние между скрещивающимися прямыми: $d = \frac{|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$.

Алгоритм решения координатным методом:

1. Ввести прямоугольную систему координат. Обычно начало выбирают в одной из вершин, оси направляют вдоль рёбер.
2. Записать координаты всех нужных точек.
3. Найти координаты векторов (направляющих, нормалей, соединяющих).
4. Применить соответствующую формулу для искомой величины.
5. Выполнить вычисления и дать ответ.

Преимущества: универсальность, возможность алгоритмизации, меньше требований к пространственному воображению. Недостаток - громоздкие вычисления.

Типичные ошибки: неправильный выбор начала координат (усложняет координаты); ошибки в решении систем для уравнения плоскости; путают координаты точек; забывают модуль в формулах.

Пример:

в прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с $AB = 2$, $AD = 3$, $AA_1 = 4$ найти угол между плоскостями ABC и $A_1 BD$.

Решение: зададим координаты: $A(0; 0; 0)$, $B(2; 0; 0)$, $D(0; 3; 0)$, $A_1(0; 0; 4)$.

Плоскость ABC - это $z = 0$, нормаль $\vec{n}_1 = (0; 0; 1)$. Для плоскости $A_1 BD$: находим векторы $\overrightarrow{A_1 B} = (2; 0; -4)$, $\overrightarrow{A_1 D} = (0; 3; -4)$, нормаль $\vec{n}_2 = \overrightarrow{A_1 B} \times \overrightarrow{A_1 D}$.

$$\text{Вычисляем: } \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \vec{i}(0 \cdot (-4) - (-4) \cdot 3) - \vec{j}(2 \cdot (-4) - (-4) \cdot 0) + \vec{k}(2 \cdot$$

$$3 - 0 \cdot 0) = (12; 8; 6). \quad \text{Тогда } \cos \varphi = \frac{|0 \cdot 12 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 6|}{\sqrt{0+0+1} \cdot \sqrt{144+64+36}} = \frac{6}{\sqrt{244}} = \frac{3}{\sqrt{61}}.$$

$$\arccos \frac{3}{\sqrt{61}}.$$

Практические задания

1. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 2 найдите координаты всех вершин и длину диагонали AC_1 .
2. Найдите угол между прямыми $A_1 B$ и BC_1 в кубе с ребром 1 (координатным методом).
3. В правильной треугольной пирамиде с ребром a найдите расстояние от вершины до плоскости основания, используя координаты.
4. Задание из ЕГЭ (№ 14): в прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с $AB = 2$, $AD = 3$, $AA_1 = 4$ найдите угол между плоскостями ABC и $A_1 BD$.
5. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 3)$.
6. В тетраэдре с вершинами $A(0; 0; 0)$, $B(2; 0; 0)$, $C(0; 3; 0)$, $D(0; 0; 4)$ найдите объём и высоту, опущенную из D .
7. Докажите, что в кубе диагонали пересекаются в одной точке, используя координаты.
8. Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями соседних граней куба (например, $A_1 B$ и BC_1) с ребром a .
9. В правильной шестиугольной призме все рёбра равны a . Найдите угол между диагональю боковой грани и плоскостью основания.
10. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; -; 23)$ и параллельной плоскости $2x - 3y + z - 5 = 0$.

8. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА МОДУЛЯ 6

ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ, ВЕРОЯТНОСТЬ, ПАРАМЕТРЫ, КОМБИНАТОРИКА

Цель модуля: обобщение и систематизация навыков решения прикладных, вероятностных и параметрических задач, соответствующих заданиям № 4, 5, 9, 10, 16, 18, 19 ЕГЭ профильного уровня, за счёт концентрации на самых важных типах задач и отработки ключевых алгоритмов.

Задачи модуля:

- Отработать основные алгоритмы решения текстовых задач на движение, работу, проценты, смеси и экономические задачи (кредиты, вклады).
- Повторить формулы теории вероятностей и комбинаторики, научиться применять их в типовых ситуациях.
- Закрепить графический и аналитический методы решения задач с параметрами.
- Познакомиться с типичными логическими приёмами, используемыми в задании № 19 (делимость, оценка, принцип Дирихле).

Планируемые результаты освоения модуля 6:

Обучающийся будет знать:

- Формулы для задач на движение, работу, смеси, сложные проценты.
- Классическое определение вероятности, комбинаторные формулы (перестановки, сочетания, размещения).

- Основные методы решения задач с параметрами (аналитический, графический).
- Простейшие логические приёмы для нестандартных задач.

Обучающийся будет уметь:

- Составлять уравнения и системы по условиям текстовых и экономических задач.
- Вычислять вероятности в классических схемах и применять комбинаторные формулы.
- Находить значения параметра по графику или аналитически.
- Решать несложные логические задачи на делимость и оценки.

Учебный план модуля 6

Наименование тем		Всего	В том числе		Формы контроля и аттестации
			теория	практика	
Учебный кабинет	Тема 6.1. Текстовые задачи и экономика	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 6.2. Вероятность, параметры, логика	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Промежуточная аттестация по модулю 6	2	-	2	Промежуточная аттестация
Итого:		6	2	4	

Календарный учебный график модуля 6

Наименование тем		Всего	В том числе		Учебная неделя, день недели
			теория	практика	
Учебный кабинет	Тема 6.1. Текстовые задачи и экономика	2	1	1	12-я неделя, среда
Учебный кабинет	Тема 6.2. Вероятность, параметры, логика	2	1	1	12-я неделя, пятница
Учебный кабинет	Промежуточная аттестация по модулю 6	2	-	2	13-я неделя, понедельник
Итого:		6	2	4	

Тема 6.1. Текстовые задачи и экономика

Теория

Текстовые задачи на движение, работу, проценты, смеси и сплавы, а также экономические задачи составляют основу заданий № 9, 10 и 16 ЕГЭ профильного уровня. Умение правильно формализовать условие и составить уравнение – ключевой навык, который отрабатывается на этом занятии. В задачах на движение используется формула $S = v \cdot t$, где путь равен произведению скорости на время. Важно согласовывать единицы измерения: если скорость дана в км/ч, то время должно быть в часах, а путь – в километрах. При встречном движении скорости складываются, а время до встречи равно отношению начального расстояния к сумме скоростей. При движении

в одном направлении с отставанием относительная скорость равна разности скоростей (догоняющий минус убегающий), и время до встречи находится как начальное расстояние, делённое на эту разность. В задачах на движение по реке необходимо различать скорость по течению (сумма собственной скорости и скорости течения) и против течения (разность), а время в каждом направлении вычисляется отдельно. Средняя скорость на всём пути определяется как общий путь, делённый на общее время, и не равна среднему арифметическому скоростей на участках. Алгоритм решения включает введение переменной, составление таблицы для всех участников (путь, скорость, время) и запись уравнения на основе условия (например, что один прибыл раньше другого, или встреча произошла через заданное время). Полученные корни проверяются на положительность и соответствие смыслу.

Задачи на работу строятся на формуле $A = p \cdot t$, где объём работы A часто принимается за 1, производительность p – это часть работы за единицу времени. При совместной работе производительности складываются, а время совместного выполнения равно $1/(p_1 + p_2)$. Алгоритм аналогичен: таблица с объёмом (1), производительностью и временем для каждого исполнителя и для совместной работы. Задачи на проценты, смеси и сплавы требуют понимания того, что концентрация (в долях) умножается на массу смеси, давая массу вещества. При смешивании нескольких растворов масса вещества в итоговой смеси равна сумме масс вещества в компонентах, что даёт уравнение. Также используются формулы увеличения/уменьшения на процент, а также последовательные изменения (например, цена сначала повысилась, потом понизилась), где каждый раз процент начисляется на новую величину.

Экономические задачи, встречающиеся в № 16, включают кредиты, вклады и оптимизацию. Для вкладов с капитализацией применяется формула сложных процентов: $S = S_0(1 + r)^n$, где r – ставка за период, n – число периодов. Для кредитов различают аннуитетные (равные платежи) и дифференцированные (основной долг делится равномерно, проценты на остаток) схемы. В дифференцированных платежах общая сумма процентов вычисляется по формуле $I = \frac{S \cdot r \cdot (n+1)}{2}$, где S – сумма кредита, r – ставка за период, n – число периодов. В оптимизационных задачах прибыль = выручка – затраты, и часто требуется найти максимум квадратичной функции, для чего используется выделение полного квадрата или нахождение вершины параболы. Важно также уметь сравнивать несколько вариантов вложения или производства и выбирать наилучший.

Практические задания

1. Из пункта A в B выехал автомобиль со скоростью 60 км/ч. Через 2 часа из A в том же направлении выехал мотоциклист со скоростью 90 км/ч. Через сколько часов мотоциклист догонит автомобиль?
2. Катер прошёл по течению реки 48 км и вернулся обратно, затратив на весь путь 5 часов. Найдите скорость течения, если собственная скорость катера 20 км/ч.

3. Два крана, работая вместе, наполнили бассейн за 6 часов. Первый кран, работая отдельно, наполняет бассейн на 5 часов быстрее второго. За сколько часов наполняет бассейн каждый кран?
4. Задание из ЕГЭ (№ 9): из пункта A в B выехал велосипедист. Через 2 часа из B навстречу ему выехал мотоциклист и встретил велосипедиста через 1 час. Найдите скорость велосипедиста, если расстояние $AB = 80$ км, а скорость мотоциклиста на 30 км/ч больше.
5. Первый рабочий выполняет заказ за 12 дней, второй – за 15 дней. За сколько дней они выполнят заказ, работая вместе?
6. Сколько граммов воды надо добавить к 200 г 30% раствора соли, чтобы получить 20% раствор?
7. В сплаве меди и цинка содержится 60% меди. После добавления 5 кг цинка содержание меди стало 40%. Найдите первоначальную массу сплава.
8. Задание из ЕГЭ (№ 16): кредит в размере 1 млн рублей взят на 4 года под 20% годовых, выплаты дифференцированные. Найдите общую сумму выплат.
9. Предприятие производит x единиц товара. Себестоимость: $C(x) = 0,5x^2 - 10x + 100$ (тыс. руб.). Цена за единицу: $p = 40$ тыс. руб. Найдите максимальную прибыль.
10. Вкладчик положил 50 000 руб. под 10% годовых (сложные проценты). Какая сумма будет через 3 года?

Тема 6.2. Вероятность, параметры, логика

Теория

Второй урок посвящён заданиям № 4, 5, 18 и 19, которые охватывают теорию вероятностей, задачи с параметрами и нестандартные логические задачи. Классическая вероятность определяется как отношение числа благоприятных исходов к общему числу равновозможных исходов. Поэтому ключевой навык – правильно подсчитать количество исходов, для чего используются комбинаторные формулы: перестановки $P_n = n!$, размещения $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ (порядок важен), сочетания $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (порядок не важен). При решении вероятностных задач важно различать, когда порядок выбора имеет значение, а когда нет, и применять соответствующую формулу. Также используются операции над событиями: сумма событий означает наступление хотя бы одного из них, произведение – наступление всех одновременно. Для независимых событий вероятность произведения равна произведению вероятностей, для несовместных – вероятность суммы равна сумме вероятностей. Кроме того, полезно знать формулу полной вероятности и формулу Байеса, хотя в ЕГЭ они встречаются реже.

Задачи с параметрами (№ 18) решаются двумя основными методами – аналитическим и графическим. При аналитическом подходе уравнение (или неравенство) сводится к виду, где параметр входит в правую часть или в коэффициенты, затем исследуется

функция в левой части: находятся её область значений, промежутки монотонности, экстремумы, и для каждого значения параметра определяется количество корней. Например, уравнение $x^2 - 4x + 3 = a$ имеет два корня при $a > -1$, один корень при $a = -1$, и ни одного при $a < -1$. Графический метод заключается в построении графика функции и рассмотрении семейства горизонтальных прямых (или других кривых), соответствующих параметру; число решений равно числу точек пересечения. Важно всегда учитывать область допустимых значений, особенно если в уравнении есть логарифмы, корни или дроби. Отдельно рассматриваются случаи, когда параметр входит в коэффициент при старшей степени квадратного уравнения – тогда нужно отдельно проверять случай, когда этот коэффициент обращается в ноль.

Нестандартные логические задачи (№ 19) не имеют универсального алгоритма, но существуют часто применяемые приёмы. Это задачи на делимость, где используются свойства остатков, чётность, разложение на множители; задачи на оценки, когда переменные ограничены, что позволяет сузить круг поиска; принцип Дирихле, согласно которому если n объектов размещены в m ящиках и $n > m$, то в каком-то ящике окажется более одного объекта – этот принцип часто помогает доказать существование. Также рассматриваются диофантовы уравнения (уравнения в целых числах), решаемые с помощью разложения на множители, выделения полного квадрата или использования делимости одной переменной на другую. На занятии разбираются типичные примеры: нахождение всех натуральных n , при которых выражение является квадратом целого числа; доказательство того, что среди произвольно выбранных чисел найдутся два с заданной разностью; решение уравнения в целых числах методом оценок.

Практические задания

1. В урне 5 белых и 3 чёрных шара. Какова вероятность вытащить белый шар?
2. Бросают две игральные кости. Найдите вероятность, что сумма очков равна 7.
3. Задание из ЕГЭ (№ 4): в случайном эксперименте бросают три монеты. Найдите вероятность того, что выпадет ровно два орла.
4. В группе 10 человек, 3 из которых отличники. Случайным образом выбирают 2 человека. Какова вероятность, что оба отличника?
5. Сколькими способами можно выбрать 3 представителей из 10?
6. Задание из ЕГЭ (№ 18): найдите все значения a , при которых уравнение $|x^2 - 2x| = a$ имеет ровно три корня.
7. При каких значениях a уравнение $\sin x = a$ имеет ровно 3 решения на $[0; 2\pi]$?
8. Задание из ЕГЭ (№ 19): найдите все натуральные n , при которых $n^2 + n + 1$ является квадратом целого числа.
9. Из чисел 1, 2, ..., 100 выбрали 51 число. Докажите, что среди них найдутся два, разность которых равна 50 (задача на принцип Дирихле).
10. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению $x^2 - y^2 = 2026$.