

ИНДИВИДУАЛЬНЫЙ ПРЕДПРИНИМАТЕЛЬ
ДАНИЕЛОВА АЛИСА ВЛАДИМЕРОВНА

Утверждаю
Индивидуальный предприниматель
Даниелова А. В.
Приказ №1а от «1» сентября 2026 г.



ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА -
ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ОБЩЕРАЗВИВАЮЩАЯ ПРОГРАММА
технической направленности
«Подготовка к ЕГЭ по математике: базовый уровень»

Срок реализации программы: 13 недель (74 ак. ч.)

Возрастная категория: 16-17 лет

Состав группы: до 6 человек

Форма обучения: очная

г. Москва, 2026 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1. КОМПЛЕКС ОСНОВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОБРАЗОВАНИЯ: ОБЪЕМ, СОДЕРЖАНИЕ, ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ	2
1.1 Пояснительная записка	2
1.2 Цель и задачи программы	4
1.3 Учебный план	6
1.4 Планируемые результаты	6
2. КОМПЛЕКС ОРГАНИЗАЦИОННО-ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ, ВКЛЮЧАЮЩИЙ ФОРМЫ АТТЕСТАЦИИ	6
2.1 Календарный учебный график	8
2.2 Условия реализации программы	8
2.3 Формы аттестации	9
2.4 Методические материалы	10
2.5 Оценочные материалы	10
2.6 Список литературы	28
3. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА МОДУЛЯ 1	29
4. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА МОДУЛЯ 2	42
5. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА МОДУЛЯ 3	68

1. КОМПЛЕКС ОСНОВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОБРАЗОВАНИЯ: ОБЪЕМ, СОДЕРЖАНИЕ, ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1.1 Пояснительная записка

Дополнительная общеобразовательная программа - дополнительная общеразвивающая программа «Подготовка к ЕГЭ по математике: базовый уровень» (далее - Программа) разработана на основе следующих нормативных правовых документов:

1. Федеральный закон Российской Федерации от 29.12.2012 г. № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации».
2. Постановление Главного государственного санитарного врача Российской Федерации от 28.09.2020 №28 «Об утверждении санитарных правил СП 2.4.3648-20 «Санитарно-эпидемиологические требования к организациям воспитания и обучения, отдыха и оздоровления детей и молодежи».
3. Приказ Министерства Просвещения РФ от 27 июля 2022 г. №629 «Об утверждении Порядка организации и осуществления образовательной деятельности по ДОП».
4. Приказ Министерства труда и социальной защиты Российской Федерации от 22 сентября 2021 года №652н «Об утверждении профессионального стандарта «Педагог дополнительного образования детей и взрослых».

Единый государственный экзамен по математике базового уровня является обязательным для всех выпускников и служит целям государственной итоговой аттестации. В отличие от профильного экзамена, базовый уровень проверяет не столько углублённое владение предметом, сколько сформированность математической грамотности - умения применять знания в повседневной жизни и практических ситуациях.

В 2026 году экзаменационная работа базового уровня состоит из 21 задания с кратким ответом, которые охватывают все основные разделы школьного курса математики: арифметику и алгебру, уравнения и неравенства, функции и графики, геометрию (планиметрию и стереометрию), элементы теории вероятностей, а также текстовые задачи. На выполнение работы отводится 180 минут. Для получения удовлетворительной оценки («3») достаточно набрать не менее 7 первичных баллов (из 21 возможного). Каждое верно выполненное задание оценивается в 1 первичный балл.

Программа адресована обучающимся 10-11 классов, желающим систематизировать знания по математике и подготовиться к сдаче ЕГЭ базового уровня для получения аттестата о среднем общем образовании. Программа построена с учётом актуальных требований Федерального института педагогических измерений (ФИПИ) и отражает все элементы содержания, включённые в кодификатор 2026 года.

Программа реализуется в очной форме, что позволяет обучающимся заниматься в удобное время, совмещая подготовку с основной учебной деятельностью. Занятия проходят на образовательной платформе: педагог в формате видеоконференций или через заранее подготовленные интерактивные материалы даёт теоретические основы и

разбор типовых заданий, а обучающиеся закрепляют материал, выполняя практические задания в электронной среде.

Отличительной особенностью программы является её трёхмодульная структура с возрастающей сложностью. Программа состоит из 74 академических часов и включает три модуля:

Модуль 1: Арифметика, алгебра и текстовые задачи. Обучающиеся осваивают арифметические действия с числами, проценты и пропорции, степени и корни, тождественные преобразования, линейные и квадратные уравнения, а также текстовые задачи на проценты, движение, работу, смеси и сплавы. Данный модуль охватывает задания № 1, 2, 4, 6, 8, 14, 15, 17 (линейные и квадратные уравнения), 19, 20.

Модуль 2: Уравнения, неравенства и геометрия. Обучающиеся осваивают рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические и простейшие тригонометрические уравнения, системы уравнений, линейные, квадратные, рациональные, показательные и логарифмические неравенства, а также планиметрические и стереометрические задачи. Данный модуль охватывает задания № 9, 10, 11, 12, 13, 17, 18.

Модуль 3: Графики, диаграммы, таблицы и теория вероятностей. Обучающиеся осваивают чтение таблиц, диаграмм и графиков, анализ графиков функций и сопоставление их с характеристиками, классическое определение вероятности, правила сложения и умножения вероятностей, преобразования выражений со степенями и корнями, а также нестандартные логические и числовые задачи. Данный модуль охватывает задания № 3, 5, 7, 16, 19, 21.

Каждое теоретическое знание немедленно подкрепляется решением конкретного задания в формате ЕГЭ - тренировка на актуальных прототипах из открытого банка заданий ФИПИ, выполнение диагностических и тренировочных работ с автоматической проверкой. Такой подход обеспечивает осмысленное усвоение материала, высокую мотивацию и оперативную обратную связь.

Структура программы выстроена с возрастающей сложностью: обучающийся последовательно осваивает материал от базовых вычислительных навыков (модуль 1) к решению уравнений, неравенств и геометрических задач (модуль 2), и, наконец, к работе с графической информацией, вероятностными задачами и нестандартными заданиями (модуль 3). В конце каждого модуля проводится промежуточная аттестация в формате письменного теста, приближённого к реальному ЕГЭ.

Направленность программы: техническая.

Адресат программы: лица 16 - 17 лет (обучающиеся 10-11 классов), желающие освоить и систематизировать знания по математике для успешной сдачи ЕГЭ базового уровня, получения аттестата о среднем общем образовании и уверенного применения математических навыков в повседневной жизни.

Продолжительность академического часа составляет 45 минут.

Нормативный срок обучения - 74 ак. часа.

Продолжительность обучения - 13 недель.

Форма обучения - очная.

Режим занятий: согласно календарному учебному графику.

Язык реализации программы: русский.

1.2 Цель и задачи программы

Цель программы: формирование у обучающихся системных знаний об основных разделах математики, методах и алгоритмах решения заданий ЕГЭ базового уровня, правилах выполнения экзаменационной работы и критериях оценивания, а также о типичных ошибках и способах их предотвращения для осознанного и успешного прохождения государственной итоговой аттестации.

Задачи программы:

1. Познакомить обучающихся со структурой КИМ ЕГЭ по математике базового уровня, системой оценивания, минимальным порогом для получения аттестата (7 первичных баллов), правилами заполнения бланков, а также с основными понятиями: уравнение, неравенство, функция, график, производная (для визуального чтения графиков), вероятность, геометрическое тело, площадь, объём.
2. Сформировать знание математической сущности основных разделов школьной математики, изучаемых в программе: арифметика и алгебра (модуль 1), уравнения, неравенства и геометрия (модуль 2), работа с графиками, таблицами, диаграммами и теория вероятностей (модуль 3) - их роли в решении практических задач и интерпретации результатов.
3. Обучить правилам выполнения экзаменационных заданий: алгоритмы решения задач с кратким ответом, использование черновика, способы проверки полученных результатов, распределение времени (180 минут на 21 задание), техника заполнения бланков ответов, особенности записи отрицательных чисел, десятичных и обыкновенных дробей.
4. Познакомить с основными методами решения типовых заданий ЕГЭ базового уровня в рамках трёх модулей:
 - **Модуль 1:** арифметические вычисления и преобразования (задания 1, 4, 14), проценты и пропорции (задания 2, 15), тождественные преобразования (задания 14, 19), линейные и квадратные уравнения (задание 17), текстовые задачи на проценты, движение, работу, смеси (задания 2, 15, 20);
 - **Модуль 2:** рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические и простейшие тригонометрические уравнения (задание 17), системы уравнений (задание 17), линейные, квадратные, рациональные, показательные и логарифмические неравенства (задание 18), планиметрические задачи на треугольники, четырёхугольники, окружность (задания 9, 10, 12), стереометрические задачи на объёмы и площади поверхностей (задания 11, 13);

- **Модуль 3:** чтение таблиц, диаграмм и графиков (задания 3, 6), анализ графиков функций и сопоставление с характеристиками (задание 7), классическое определение вероятности, правила сложения и умножения вероятностей (задание 5), преобразования выражений со степенями и корнями (задание 16), задачи на смекалку с использованием признаков делимости и логических рассуждений (задания 19, 21).
5. Сформировать навыки решения текстовых задач: задачи на проценты и части (задания 2, 15), движение (задание 20), работу (задание 20), смеси и сплавы (задание 20) - алгоритмизация, анализ условия, введение переменных, составление уравнений, проверка и интерпретация результата.
 6. Обучить решению уравнений различных типов: использование свойств степеней и логарифмов, методы замены переменной, разложения на множители, приведение к общему знаменателю, возведение в квадрат (задание 17), а также решению неравенств методом интервалов с учётом ОДЗ (задание 18).
 7. Сформировать навыки работы с функциями и их графиками: визуальное определение знака и величины производной по наклону касательной, чтение графиков зависимостей, определение значений функции по графику, сопоставление графиков с характеристиками поведения функции (задания 3, 6, 7).
 8. Дать представление о геометрических методах решения задач: планиметрия - треугольники (равнобедренные, прямоугольные), четырёхугольники (прямоугольник, квадрат, параллелограмм, трапеция), окружность (центральные и вписанные углы, теорема о вписанном угле, опирающемся на диаметр), площади фигур, теорема Пифагора (задания 9, 10, 12); стереометрия - объёмы и площади поверхности прямоугольного параллелепипеда, куба, цилиндра, конуса, шара, правильной призмы и пирамиды, применение коэффициента подобия для объёмов (задания 11, 13).
 9. Сформировать системные знания о теории вероятностей: классическое определение вероятности $P(A) = m/n$, правила сложения для несовместных событий, умножения для независимых событий, вероятность противоположного события, решение комбинированных задач (задание 5).
 10. Познакомить с правилами оформления решений и заполнения бланков ЕГЭ: краткий ответ в виде числа, десятичной дроби или последовательности цифр, особенности записи отрицательных чисел, обыкновенных дробей, а также с правилами работы с черновиком и чистовым бланком.
 11. Воспитывать ответственное отношение к итоговой государственной аттестации, понимание важности систематической подготовки, соблюдения правил проведения экзамена и честности при выполнении работы.
 12. Развивать самодисциплину, усидчивость, целеустремлённость и умение организовать собственное учебное время, своевременно выявлять пробелы в знаниях (через анализ ошибок в тренировочных вариантах) и принимать меры для их устранения.

13. Формировать умение применять полученные математические знания на практике: моделировать реальные ситуации на языке алгебры и геометрии (текстовые задачи, прикладная планиметрия и стереометрия), оценивать правдоподобность полученных результатов, делать выводы и принимать решения в повседневной жизни.
14. Стимулировать интерес к дальнейшему самообразованию в области точных наук, развитию логического и алгоритмического мышления, осознанному отношению к собственной образовательной траектории и выбору профессии.

1.3 Учебный план

Наименование модуля		Всего	В том числе		Формы контроля и аттестации
			теория	практика	
Учебный кабинет	МОДУЛЬ 1. АРИФМЕТИКА, АЛГЕБРА И ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ	24	11	13	Текущий контроль, промежуточная аттестация
Учебный кабинет	МОДУЛЬ 2. УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА И ГЕОМЕТРИЯ	26	12	14	Текущий контроль, промежуточная аттестация
Учебный кабинет	МОДУЛЬ 3. ГРАФИКИ, ДИАГРАММЫ, ТАБЛИЦЫ И ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ	24	11	13	Текущий контроль, промежуточная аттестация
Итого:		74	34	40	

1.4 Планируемые результаты

Обучающийся будет знать:

1. Структуру и содержание КИМ ЕГЭ по математике базового уровня 2026 года, систему оценивания, минимальный порог для получения аттестата (7 первичных баллов), правила заполнения бланков.
2. Свойства чисел, правила выполнения арифметических действий с обыкновенными и десятичными дробями, процентами, степенями и корнями.
3. Алгоритмы решения текстовых задач на проценты, движение, работу, смеси и сплавы (задания 2, 15, 20).
4. Способы решения линейных, квадратных, рациональных, иррациональных, показательных, логарифмических и простейших тригонометрических уравнений, а также систем уравнений (задание 17).
5. Свойства числовых неравенств и методы их решения: линейные, квадратные, рациональные, показательные и логарифмические неравенства (задание 18).

6. Определения и свойства основных функций (линейная, квадратичная, степенная, показательная, логарифмическая); умение читать графики и сопоставлять их с характеристиками (задания 3, 6, 7).
7. Формулы для вычисления геометрических величин: площади и периметра плоских фигур (задания 9, 10, 12), объёма и площади поверхности тел (задания 11, 13).
8. Классическое определение вероятности, правила сложения и умножения вероятностей (задание 5).
9. Правила оформления решений заданий с кратким ответом в бланках ЕГЭ: запись чисел, десятичных дробей, последовательностей цифр.
10. Типичные ошибки при выполнении экзаменационных заданий и способы их предотвращения; признаки неверного решения и алгоритм проверки.
11. Стратегии распределения времени на экзамене (180 минут на 21 задание) и порядок выполнения заданий.
12. Критерии оценивания заданий и требования к оформлению ответов.

Обучающийся будет уметь:

1. Выполнять арифметические действия, сочетая устные и письменные приёмы; находить значения числовых и буквенных выражений (задания 1, 4, 14, 16).
2. Решать текстовые задачи различных типов: на проценты, движение, работу, смеси и сплавы (задания 2, 15, 20).
3. Решать линейные, квадратные, рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические и простейшие тригонометрические уравнения, а также системы уравнений (задание 17).
4. Решать линейные, квадратные, рациональные, показательные и логарифмические неравенства (задание 18).
5. Определять значение функции по графику; описывать по графику поведение и свойства функции; сопоставлять точки на графике со значениями производной (задания 3, 6, 7).
6. Решать планиметрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей) (задания 9, 10, 12); решать стереометрические задачи на нахождение объёмов и площадей поверхностей (задания 11, 13).
7. Извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах и графиках (задания 3, 6).
8. Вычислять вероятности событий с использованием классического определения вероятности, правил сложения и умножения (задание 5).
9. Моделировать реальные ситуации на языке алгебры и геометрии, исследовать построенные модели.
10. Распознавать неверные решения и отказываться от неподходящих методов; корректировать ход решения при обнаружении ошибок.
11. Правильно заполнять бланки ответов ЕГЭ в соответствии с установленными требованиями.

12.Оценивать собственные результаты выполнения тренировочных вариантов, выявлять проблемные зоны и своевременно корректировать план подготовки.

2. КОМПЛЕКС ОРГАНИЗАЦИОННО-ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ, ВКЛЮЧАЮЩИЙ ФОРМЫ АТТЕСТАЦИИ

2.1 Календарный учебный график

Наименование модуля		Всего	В том числе		Учебная неделя, день недели
			теория	практика	
Учебный кабинет	МОДУЛЬ 1. АРИФМЕТИКА, АЛГЕБРА И ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ	24	11	13	1-4, понедельник, среда, пятница
Учебный кабинет	МОДУЛЬ 2. УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА И ГЕОМЕТРИЯ	26	12	14	5-9, понедельник, среда, пятница
Учебный кабинет	МОДУЛЬ 3. ГРАФИКИ, ДИАГРАММЫ, ТАБЛИЦЫ И ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ	24	11	13	10-13, понедельник, среда, пятница
Итого:		74	34	40	

2.2 Условия реализации программы

ИП Даниелова А. В. располагает материально-технической базой, обеспечивающей реализацию образовательной программы и соответствующей действующим санитарным и противопожарным правилам и нормам.

Материально-техническое обеспечение:

- Стол ученический – 6 шт.
- Стул ученический – 6 шт.
- Стол учительский – 1 шт.
- Стул учительский – 1 шт.
- Доска магнитно-маркерная – 2 шт.
- Шкаф для хранения учебных пособий – 1 шт.
- Шкаф для хранения личных вещей – 1 шт.
- Ноутбук – 2 шт.
- Проектор переносной – 1 шт.
- Экран переносной – 1 шт.
- Динамики для громкого воспроизведения – 1 шт.

Кадровое обеспечение реализации программы

Реализация программы обеспечивается педагогами дополнительного образования. Педагоги ИП Даниелова А. В. имеют высшее и (или) среднее профессиональное образование по направлению подготовки «Образование и педагогические науки», соответствуют требованиям профессионального стандарта «Педагог дополнительного образования детей и взрослых» (утвержден приказом Министерства труда и социальной защиты Российской Федерации от 22.09.2021 № 652н), без предъявления требований к стажу работы. Педагоги успешно проходят программы повышения квалификации по сфере деятельности, соответствующей направленности Программы.

2.3 Формы аттестации

Оценка достижения планируемых результатов освоения Программы представляет собой единую систему, основанную на принципах объективности, систематичности и учёта индивидуальных и возрастных особенностей обучающихся. Она реализуется через два взаимосвязанных компонента: текущий контроль успеваемости и промежуточную аттестацию.

Текущий контроль - это систематическая проверка учебных достижений, проводимая педагогом непосредственно в ходе образовательной деятельности в соответствии с Программой. Ключевая задача текущего контроля - обеспечить мониторинг уровня и качества освоения тем Программы для своевременной коррекции процесса обучения. Текущий контроль осуществляется по итогам каждой пройденной темы.

Функции текущего контроля:

1. диагностическая: определение фактического уровня теоретических знаний (структура КИМ ЕГЭ, методы решения уравнений и неравенств, свойства функций, геометрические формулы, теория вероятностей) и практических умений (решение заданий в формате ЕГЭ, работа с графиками и таблицами, заполнение бланков ответов, анализ собственных результатов);
2. коррекционная: своевременное выявление и устранение пробелов в усвоении материала;
3. стимулирующая: мотивация обучающихся к систематической работе, поддержание познавательного интереса.

Текущий контроль осуществляется в форме выполнения практических заданий, предусмотренных содержанием каждой темы: решение заданий в формате ЕГЭ (соответствующих номеров КИМ), заполнение пропусков в алгоритмах решения, работа с таблицами и схемами, составление алгоритмов решения задач, выполнение тестовых заданий с автоматической проверкой, заполнение бланков ответов, анализ собственных ошибок.

Промежуточная аттестация - это оценка качества усвоения обучающимися содержания Программы, которая направлена на комплексную проверку достижения всех заявленных целей программы и выявление связей между её элементами. Промежуточная аттестация проводится по завершении каждого модуля. Понятие

промежуточной аттестации закреплено в п. 22 ст. 2 Федерального закона № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации».

Функции промежуточной аттестации:

1. контрольно-оценочная: выявление уровня сформированности знаний, умений и представлений обучающихся, их соответствия планируемым результатам программы;
2. аналитическая: анализ полноты реализации программы, соотнесение прогнозируемых и реальных результатов;
3. развивающая: помощь обучающимся в осознании достигнутого уровня знаний и в определении дальнейших перспектив.

Промежуточная аттестация осуществляется в форме письменного теста в формате ЕГЭ (задания по темам модуля) и творческого (проектного) задания. Тест направлен на проверку знаний и умений по модулю в формате, максимально приближенном к экзаменационному. Творческое задание позволяет обучающемуся продемонстрировать умение применять полученные знания в практико-ориентированной деятельности (разработка индивидуальной стратегии подготовки, составление алгоритмов решения задач, создание памятки по выполнению экзаменационной работы, разработка плана повторения тем). Оценивание осуществляется по системе «зачтено / не зачтено» на основании разработанных критериев, которые включают полноту, точность, самостоятельность выполнения и практическую значимость выполненной работы.

2.4 Методические материалы

Методические материалы программы разработаны с учётом особенностей обучающихся (10–11 классы), принципов доступности, практико-ориентированного обучения, а также требований к реализации программ дополнительного образования естественно-научной направленности в очной форме обучения в учебном кабинете.

Основу образовательных ресурсов составляют:

- Теоретический материал – как источник структурированной информации по основным разделам математики: арифметические действия с числами, проценты и пропорции, степени и корни, тождественные преобразования алгебраических выражений, линейные и квадратные уравнения, текстовые задачи, показательные и логарифмические уравнения, системы уравнений, неравенства и их системы, геометрические задачи (планиметрия и стереометрия), теория вероятностей, чтение графиков, таблиц и диаграмм.
- Практические задания – для формирования навыков решения заданий в формате ЕГЭ, работы с учебными таблицами и схемами, составления памяток по решению типовых задач, выполнения тренировочных вариантов, заполнения бланков ответов, а также для закрепления изученного теоретического материала через решение задач в рабочих тетрадях и у доски с последующей проверкой педагогом.

Программа использует следующие педагогические методы, соответствующие её целям и ориентированные на развитие логического мышления, самодисциплины, аналитических способностей и ответственного отношения к итоговой аттестации:

- Объяснительно-иллюстративный метод – как основной способ передачи знаний через лекции, конспекты и презентации педагога, сопровождаемые демонстрацией наглядных пособий (маркерная доска, проекционный материал, плакаты): алгоритмов решения типовых заданий, схем и таблиц по классификации уравнений, неравенств и методов их решения, свойств функций и чтения графиков, формул для вычисления геометрических величин, этапов решения текстовых задач.
- Частично-поисковый метод – при выполнении заданий на определение типа задачи и подбор алгоритма решения, выявление причин возникновения ошибок, анализ ситуаций правильного и неправильного применения формул, распознавание полезных и ошибочных шагов в решении, определение правильной последовательности действий при решении уравнений и неравенств, выбор оптимального метода в зависимости от условия задачи (в том числе в ходе коллективных обсуждений).
- Практический метод – через выполнение конкретных заданий: решение уравнений и неравенств различных типов, заполнение пропусков в алгоритмах решения, распределение заданий по группам в зависимости от метода решения, подстановка корней для проверки, определение направлений решения задач, построение плана решения текстовых задач, выполнение тренировочных вариантов с ограничением времени, проверка результатов по чек-листу самопроверки. Все практические работы выполняются в аудитории и проверяются педагогом.
- Рефлексивно-аналитический метод – через самоанализ выполненных заданий, проверку правильности решений по ключам, сравнение собственного решения с эталонным, участие в коллективных обсуждениях, ответы на вопросы о значении изученных правил и понятий (например, «Почему важно находить ОДЗ при решении уравнений?», «Как проверить правильность решения текстовой задачи?», «Почему нельзя терять корни при делении на выражение с переменной?»).

Воспитательная составляющая реализуется через:

- формирование ответственного отношения к итоговой государственной аттестации, понимания важности систематической подготовки, соблюдения правил проведения экзамена и честности при выполнении работы;
- воспитание дисциплинированности и регулярности в подготовке, понимания ценности систематического подхода к обучению;
- развитие умения работать с информацией, критически оценивать собственные результаты и корректировать план подготовки;

- культивирование интереса к самообразованию в области точных наук, развитию логического и алгоритмического мышления, осознанному отношению к собственной образовательной траектории.

Обучение осуществляется с применением следующих педагогических технологий:

- Технология поэтапного формирования знаний и навыков – обучающиеся последовательно осваивают материал от наиболее наглядного и доступного (арифметика, проценты, степени) к более сложному (уравнения и неравенства), а затем к практическим навыкам выполнения комплексных тренировочных вариантов (составление индивидуального плана подготовки, выбор стратегии выполнения заданий, оценка эффективности, учёт типичных ошибок).
- Технология здоровьесберегающего обучения – чередование теоретических и практических блоков (например, 20 минут теории, затем 25 минут практической работы), обязательное включение перерывов (5–10 минут после каждого академического часа), контроль осанки, соответствие объёма и сложности материала возрастным возможностям обучающихся (16–17 лет), использование физкультминутки при длительной работе с чертежами и вычислениями.

Учебное занятие в рамках программы строится как завершённый образовательный цикл, последовательно реализующий четыре ключевых компонента, направленных на достижение планируемых результатов и обеспечение текущего контроля успеваемости.

1. Теоретико-информационный блок

Цель: формирование у обучающихся системы знаний, понятий и представлений по теме занятия. В результате обучающийся получает необходимую теоретическую основу.

Содержание:

- Структура и содержание ЕГЭ по математике базового уровня, система оценивания, правила заполнения бланков.
- Свойства чисел, правила выполнения арифметических действий с обыкновенными и десятичными дробями, процентами, степенями и корнями.
- Алгоритмы решения текстовых задач на проценты, движение, работу, смеси и сплавы.
- Способы решения линейных, квадратных, рациональных, иррациональных, показательных и логарифмических уравнений.
- Свойства числовых неравенств и методы их решения: линейные, квадратные, рациональные неравенства.
- Определения и свойства основных функций (линейная, квадратичная, степенная, показательная, логарифмическая), умение читать графики.
- Формулы для вычисления геометрических величин: площади и периметра плоских фигур, объёма и площади поверхности тел.
- Элементы комбинаторики и основы теории вероятностей: классическое определение вероятности, правила сложения и умножения вероятностей.
- Правила оформления решений заданий с кратким ответом в бланках ЕГЭ.

- Типичные ошибки при выполнении экзаменационных заданий и способы их предотвращения.
- Стратегии распределения времени на экзамене и порядок выполнения заданий.

2. Практико-преобразующий блок

Цель: перевод теоретических знаний в практические умения. В результате обучающийся создаёт конкретный образовательный продукт, демонстрирующий применение изученной теории.

Содержание:

- Решение заданий в формате ЕГЭ по каждой теме (в рабочих тетрадях, у доски, в ходе групповой работы).
- Выполнение тренировочных вариантов с ограничением времени.
- Заполнение пропусков в алгоритмах решения уравнений и неравенств.
- Составление алгоритмов решения текстовых задач различных типов.
- Работа с графиками функций: чтение, определение свойств, построение по точкам.
- Решение планиметрических и стереометрических задач с использованием формул (с опорой на чертежи и модели).
- Выполнение заданий на теорию вероятностей с использованием классического определения вероятности.
- Работа с таблицами, диаграммами и графиками (анализ и интерпретация данных).
- Заполнение бланков ответов ЕГЭ в соответствии с установленными требованиями.
- Составление индивидуального плана повторения тем на основе анализа ошибок, допущенных в тренировочных работах.

3. Оценочно-коррекционный блок

Цель: обеспечение объективной проверки достигнутых результатов, выявление затруднений и их своевременная коррекция. В результате обучающийся получает обратную связь от педагога, а педагог – данные для мониторинга образовательных результатов.

Содержание:

- Проверка педагогом выполненных заданий в рабочей тетради (заполненные таблицы, алгоритмы, ответы на вопросы, планы подготовки) по критериям полноты, точности и соответствия изученному материалу.
- Проверка тренировочных вариантов по ключам: правильность выполнения заданий, корректность выбора методов, точность заполнения бланков.
- Оценка устных ответов обучающихся в ходе коллективных обсуждений: умение объяснить значение понятий, обосновать выбор метода решения, охарактеризовать преимущества и недостатки различных способов решения задач.

- Предоставление индивидуальной обратной связи с указанием успешно освоенного материала и рекомендациями по темам, требующим дополнительного закрепления.
- Проведение промежуточных аттестаций после каждого модуля (письменная работа в формате ЕГЭ, выполняемая в аудитории) с фиксацией результатов в журнале успеваемости.

4. Рефлексивный блок

Цель: развитие у обучающихся способности к самоанализу, формирование осознанного отношения к собственному обучению и результатам подготовки. В результате обучающийся закрепляет осмысленность обучения, формирует личную ответственность за свои образовательные результаты.

Содержание:

- Ответы на вопросы после выполнения задания: «Что было легко? Что вызвало затруднения? Почему?»
- Сравнение собственных результатов выполнения тренировочного варианта с планируемыми, выявление отличий и формулирование одного изменения, которое можно внести в подготовку.
- Обсуждение в группе: «Какие темы оказались самыми сложными? Какие приёмы помогли решить сложные задания?»
- Самооценка уровня готовности к экзамену и обсуждение с педагогом: «Что я могу делать каждый день, чтобы улучшить свой результат?»
- Формулирование личной цели на следующий модуль (например: «Отработать решение показательных уравнений», «Выучить все геометрические формулы», «Составить чёткий план повторения на месяц»).
- Итоговая рефлексия по завершении всей программы: «Что я теперь знаю о структуре ЕГЭ? Какие стратегии выполнения заданий я освоил? Что я буду делать для подготовки в оставшееся время? Как изменилось моё отношение к математике?»

2.5 Оценочные материалы

ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АТТЕСТАЦИЯ ПО МОДУЛЮ 1

1. На бензоколонке один литр бензина стоит 32 руб. 60 коп. Водитель залил в бак 30 литров бензина и купил бутылку воды за 48 рублей. Сколько рублей сдачи он получит с 1500 рублей?

2. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ

- А) Объём воды в озере Байкал
- Б) Объём пакета кефира
- В) Объём бассейна

Г) Объём ящика для фруктов

ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

1) 1 л

2) 23 615,39 км³

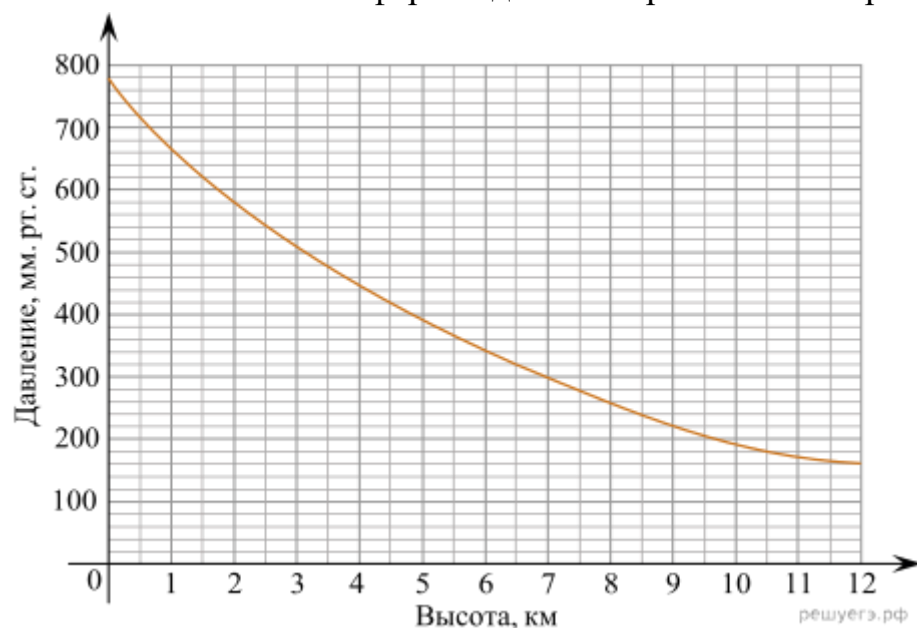
3) 72 л

4) 600 м³

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

3. На графике изображена зависимость атмосферного давления (в миллиметрах ртутного столба) от высоты над уровнем моря (в километрах). Определите по графику, на какой высоте атмосферное давление равно 260 мм рт. ст. Ответ дайте в километрах.



4. Работа постоянного тока (в джоулях) вычисляется по формуле $A = I^2 R t$, где I - сила тока (в амперах), R - сопротивление (в омах), t - время (в секундах). Пользуясь этой формулой, найдите A (в джоулях), если $t = 4$ с, $I = 7$ А и $R = 5$ Ом.

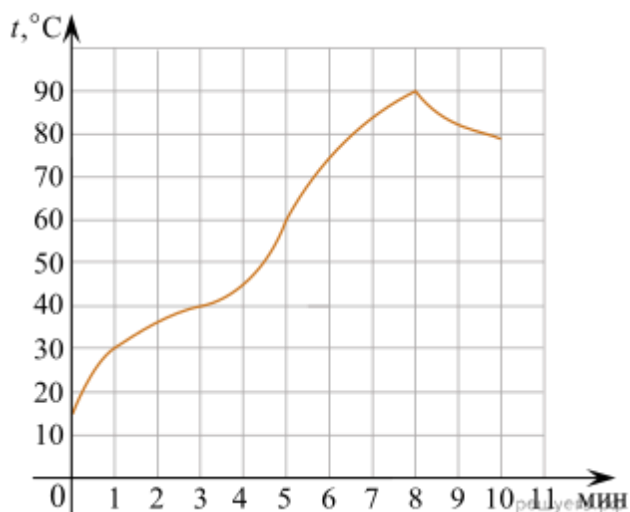
5. Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется *положительным*. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,9. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,01. Известно, что 5% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

6. Керамическая плитка одной и той же торговой марки выпускается трёх разных размеров. Плитки упакованы в пачки. Требуется купить плитку, чтобы облицевать пол квадратной комнаты со стороной 3 м. Размеры плитки, количество плиток в пачке и стоимость пачки приведены в таблице

Размер плитки (см х см)	Количество плиток в пачке	Цена пачки
20 х 20	25	604 р.
20 х 30	16	595 р. 20 к.
30 х 30	11	594 р.

Во сколько рублей обойдётся наиболее дешёвый вариант покупки?

7. На графике показан процесс разогрева двигателя легкового автомобиля. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее с момента запуска двигателя, на оси ординат - температура двигателя в градусах Цельсия.



Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу времени характеристику процесса разогрева двигателя на этом интервале.

ИНТЕРВАЛЫ ВРЕМЕНИ

- А) 0–2 мин.
- Б) 2–4 мин.
- В) 4–6 мин.
- Г) 8–10 мин.

ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОЦЕССА

- 1) температура росла медленнее всего
- 2) температура падала
- 3) температура росла быстрее всего
- 4) температура не превышала 40 °C

В таблице под каждой буквой, соответствующей интервалу времени, укажите номер характеристики процесса.

Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

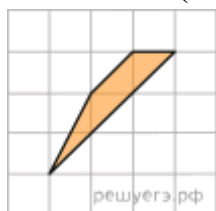
А	Б	В	Г

8. В классе учатся 20 человек, из них 13 человек посещают кружок по истории, а 10 человек - кружок по математике. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных. В этом классе

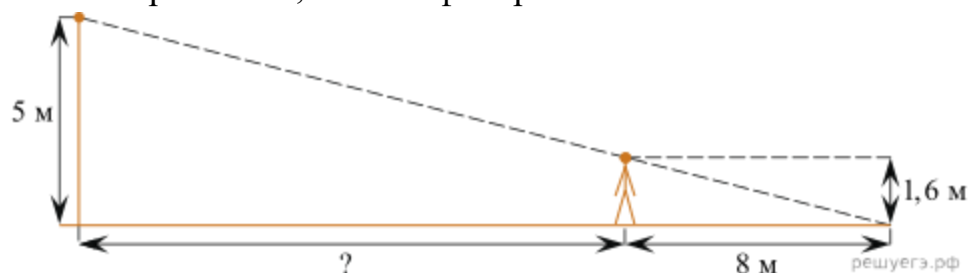
- 1) нет ученика, который не посещает ни кружок по истории, ни кружок по математике;
- 2) найдутся хотя бы два человека, которые посещают оба кружка;
- 3) если ученик не ходит на кружок по истории, то он обязательно ходит на кружок по математике;
- 4) не найдётся 11 человек, которые посещают оба кружка.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

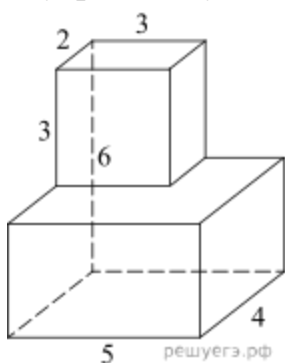
9. Найдите площадь трапеции, изображенной на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см $\times$ 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



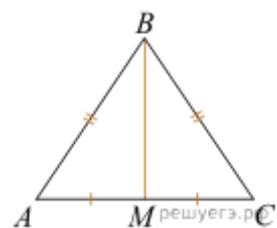
10. На каком расстоянии (в метрах) от фонаря стоит человек ростом 1,6 м, если длина его тени равна 8 м, высота фонаря 5 м?



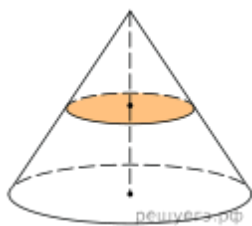
11. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



12. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, медиана BM равна 6. Площадь треугольника ABC равна $12\sqrt{7}$. Найдите длину стороны AB .



13. Объём конуса равен 32. Через середину высоты конуса проведена плоскость, параллельная основанию. Найдите объём конуса, отсекаемого от данного конуса проведённой плоскостью.



14.

$$\frac{18}{4} \cdot \frac{14}{3} \div \frac{4}{5}.$$

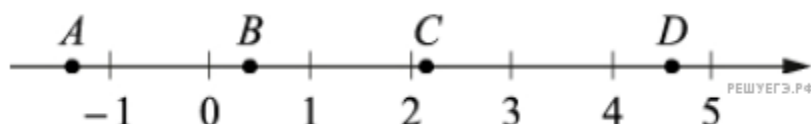
Найдите значение выражения

15. В школе мальчики составляют 54 % от числа всех учащихся. Сколько в этой школе всего учащихся, если девочек в ней на 60 человек меньше, чем мальчиков?

16. Найдите значение выражения $7,9 \cdot 10^{-2} + 4,5 \cdot 10^{-1}$.

17. Найдите корень уравнения $\log_4(x+2) + \log_4 3 = \log_4 15$.

18. На координатной прямой отмечены точки A, B, C, D (см. рис.).



Число m равно $\log_3 5$.

Установите соответствие между указанными точками и числами в правом столбце, которые им соответствуют.

Точки

A

B

C

D

Числа

1) $6 - m$

2) m^2

3) $-\frac{2}{m}$

4) $m - 1$

В приведенной ниже таблице под каждой буквой, обозначающей точку, укажите номер соответствующего ей числа.

A	B	C	D

19. Сумма цифр трёхзначного натурального числа A делится на 12. Сумма цифр числа $(A + 6)$ также делится на 12. Найдите наименьшее возможное число A .

20. Грузовик перевозит партию щебня массой 210 тонн, ежедневно увеличивая норму перевозки на одно и то же число тонн. Известно, что за первый день было перевезено 2 тонны щебня. Определите, сколько тонн щебня было перевезено за девятый день, если вся работа была выполнена за 14 дней.

21. Про натуральные числа A , B и C известно, что каждое из них больше 6, но меньше 10. Загадали натуральное число, затем его умножили на A , потом прибавили к полученному произведению B и вычли C . Получилось 186. Какое число было загадано?

ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АТТЕСТАЦИЯ ПО МОДУЛЮ 2

1. Таксист за месяц проехал 6000 км. Стоимость 1 литра бензина - 20 рублей. Средний расход бензина на 100 км составляет 9 литров. Сколько рублей потратил таксист на бензин за этот месяц?

2. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ

- А) масса куриного яйца
- Б) масса детской коляски
- В) масса взрослого бегемота
- Г) масса активного вещества в таблетке

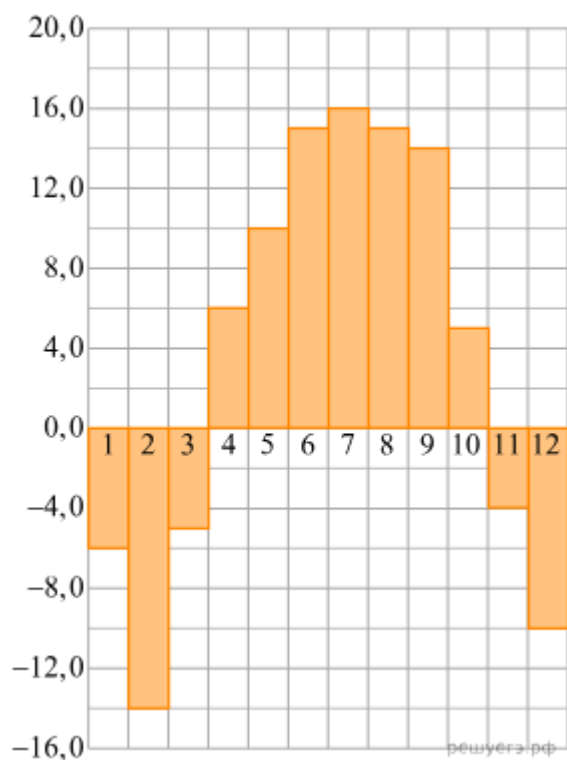
ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

- 1) 2,5 мг
- 2) 14 кг
- 3) 50 г
- 4) 3 т

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

А	Б	В	Г

3. На диаграмме показана среднемесячная температура в Нижнем Новгороде (Горьком) за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали - температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наименьшую среднемесячную температуру в 1994 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



4. Найдите m из равенства $F = ma$, если $F = 84$ и $a = 12$.

5. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая - 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая - 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

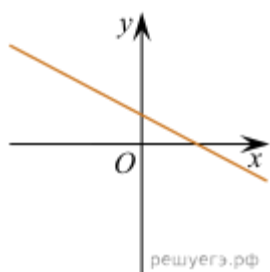
6. Телефонная компания предоставляет на выбор три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за 1 минуту разговора
Повременный	135 руб. в месяц	0,3 руб.
Комбинированный	255 руб. за 450 мин. в месяц	0,28 руб. за 1 мин. сверх 450 мин. в месяц
Безлимитный	380 руб. в месяц	

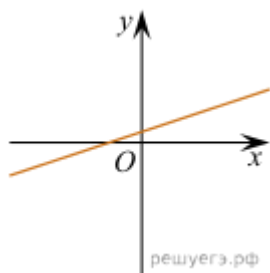
Абонент выбрал наиболее дешевый тарифный план, исходя из предположения, что общая длительность телефонных разговоров составляет 650 минут в месяц. Какую сумму он должен заплатить за месяц, если общая длительность разговоров в этом месяце действительно будет равна 650 минут? Ответ дайте в рублях.

7. На рисунках изображены графики функций вида $y = kx + b$. Установите соответствие между графиками функций и знаками коэффициентов k и b .

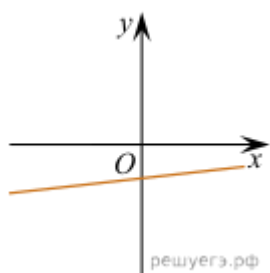
ФУНКЦИИ



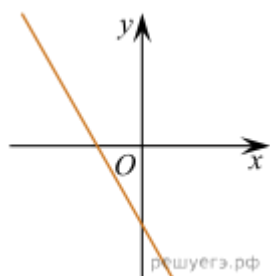
А)



Б)



В)



Г)

КОЭФФИЦИЕНТЫ

1) $k > 0, b > 0$

2) $k > 0, b < 0$

3) $k < 0, b > 0$

4) $k < 0, b < 0$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

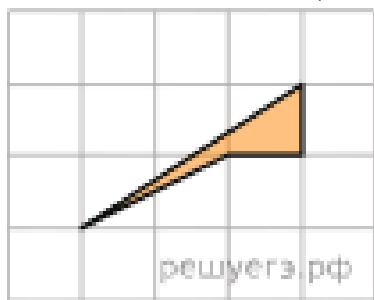
А	Б	В	Г

8. Отец обещал сыну-студенту подарить ноутбук, если он сдаст сессию без троек. Отец всегда выполняет свои обещания. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых фактов.

1. Если сессия сдана на отлично, то ноутбук будет подарен.
2. Если сын получит тройку, то отец не подарит ему ноутбук.
3. Если ноутбук не был подарен, то сессия не сдана успешно (без троек).
4. Если ноутбук был подарен, то сессия сдана без троек.

В ответе укажите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

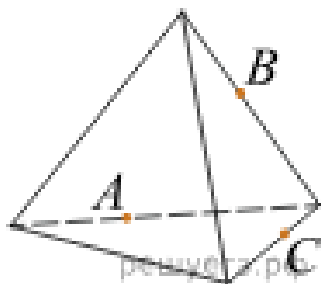
9. Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см х 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



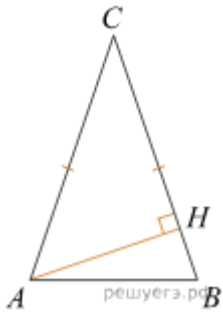
10. Какой наименьший угол (в градусах) образуют минутная и часовая стрелки часов в 16:00?



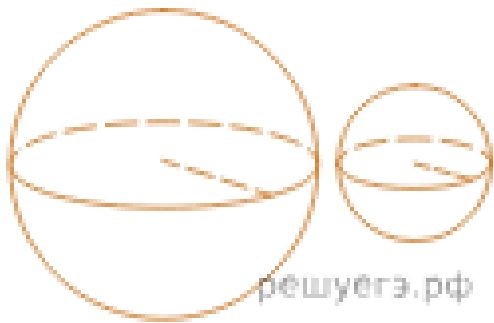
11. Плоскость, проходящая через точки A , B и C (см. рис.), разбивает тетраэдр на два многогранника. Сколько рёбер у получившегося многогранника с бóльшим числом вершин?



12. В треугольнике ABC $AC = BC = 4$ угол C равен 30° Найдите высоту $АН$.



13. Даны два шара с радиусами 4 и 1. Во сколько раз объём большего шара больше объёма другого?



14. Найдите значение выражения $(728^2 - 26^2) : 754$.

15. Акции предприятия распределены между государством и частными акционерами в отношении 3 : 5 соответственно. Общая прибыль предприятия после уплаты налогов за год составила 32 млн рублей. Какая сумма из этой прибыли должна пойти на выплату частным акционерам? Ответ дайте в миллионах рублей.

$$0,8^{\frac{1}{7}} \cdot 5^{\frac{2}{7}} \cdot 20^{\frac{6}{7}}.$$

16. Найдите значение выражения

17. Найдите корень уравнения $1 + 8(3x + 7) = 9$.

18. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

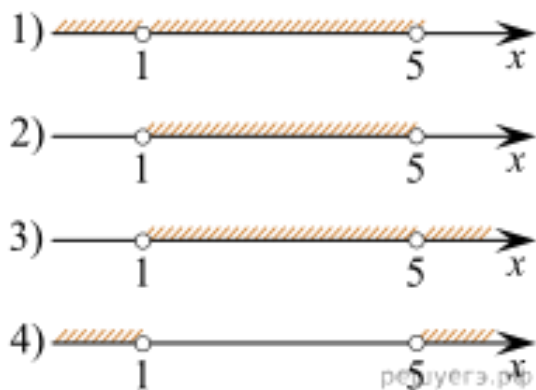
А) $(x - 1)^2(x - 5) < 0$

Б) $(x - 1)(x - 5) < 0$

В) $\frac{x - 1}{x - 5} > 0$

Г) $\frac{(x - 5)^2}{x - 1} > 0$

РЕШЕНИЯ



В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

19. Найдите четырёхзначное число, кратное 22, произведение цифр которого равно 24.

В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

20. Смешав 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 36-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 30-процентного раствора использовали для получения смеси?

21. В обменном пункте можно совершить одну из двух операций:

- 1) за 3 золотых монеты получить 4 серебряных и одну медную;
- 2) за 6 серебряных монет получить 4 золотых и одну медную.

У Николы были только серебряные монеты. После посещения обменного пункта серебряных монет у него стало меньше, золотых не появилось, зато появилось 35 медных. На сколько уменьшилось количество серебряных монет у Николы?

ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АТТЕСТАЦИЯ ПО МОДУЛЮ 3

1. В старинной книге полезных советов «Домострой» имеется рецепт десерта «Шарлотка». Для приготовления шарлотки следует взять 12 фунтов яблок. Сколько килограммов яблок надо взять хозяйке для приготовления шарлотки? Считайте, что 1 фунт равен 400 граммам.

2. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ

- А) масса куриного яйца
- Б) масса детской коляски
- В) масса взрослого бегемота
- Г) масса активного вещества в таблетке

ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

- 1) 2,5 мг

2) 14 кг

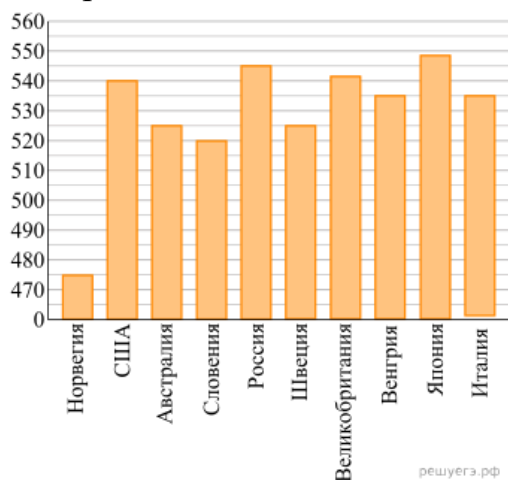
3) 50 г

4) 3 т

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

А	Б	В	Г

3. На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 4-го класса, по естествознанию в 2007 году (по 1000-балльной шкале). По данным диаграммы найдите число стран, в которых средний балл участников выше, чем в Венгрии.



4. Перевести температуру из шкалы Фаренгейта в шкалу Цельсия позволяет формула

$$t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32),$$

где t_C - температура в градусах по шкале Цельсия, t_F - температура в градусах по шкале Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Цельсия соответствует 50 градусов по шкале Фаренгейта?

5. В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,05 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

6. В магазине одежды объявлена акция: если покупатель приобретает товар на сумму свыше 10 000 руб., он получает сертификат на 1000 рублей, который можно обменять в том же магазине на любой товар ценой не выше 1000 руб. Если покупатель участвует в акции, он теряет право возвратить товар в магазин. Покупатель И. хочет приобрести пиджак ценой 9500 руб., рубашку ценой 800 руб. и галстук ценой 600 руб. В каком случае И. заплатит за покупку меньше всего:

1. И. купит все три товара сразу.

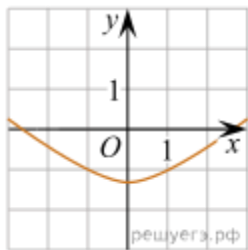
2. И. купит сначала пиджак и рубашку, галстук получит за сертификат.

3. И. купит сначала пиджак и галстук, получит рубашку за сертификат.

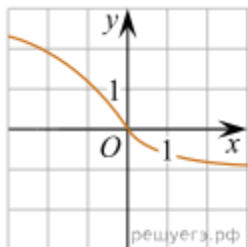
В ответ запишите, сколько рублей заплатит И. за покупку в этом случае.

7. Установите соответствие между графиками функций и характеристиками этих функций на отрезке $[-1; 1]$.

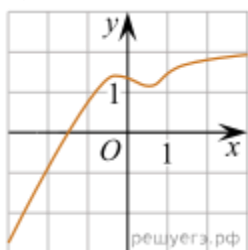
ГРАФИКИ



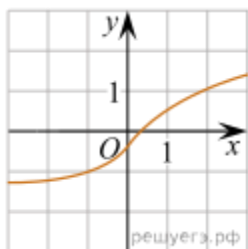
А)



Б)



В)



Г)

ХАРАКТЕРИСТИКИ

- 1) функция принимает отрицательное значение в каждой точке отрезка $[-1; 1]$
- 2) функция возрастает на отрезке $[-1; 1]$
- 3) функция принимает положительное значение в каждой точке отрезка $[-1; 1]$
- 4) функция убывает на отрезке $[-1; 1]$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

8. Некоторые сотрудники фирмы летом 2014 года отдыхали на даче, а некоторые - на море. Все сотрудники, которые не отдыхали на море, отдыхали на даче. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

1. Каждый сотрудник этой фирмы отдыхал летом 2014 года или на даче, или на море, или и там, и там.
2. Сотрудник этой фирмы, который летом 2014 года не отдыхал на море, не отдыхал и на даче.

3. Если Фаина не отдыхала летом 2014 года ни на даче, ни на море, то она является сотрудником этой фирмы.

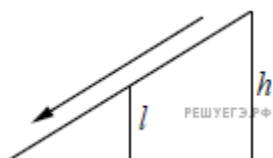
4. Если сотрудник этой фирмы не отдыхал на море летом 2014 года, то он отдыхал на даче.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

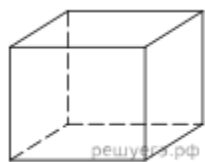
9. Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



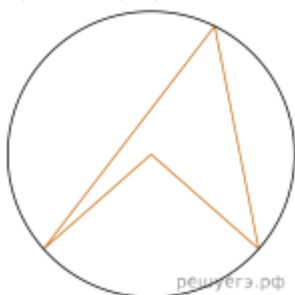
10. Детская горка укреплена вертикальным столбом, расположенным посередине спуска. Найдите высоту l этого столба, если высота h горки равна 2 метрам. Ответ дайте в метрах.



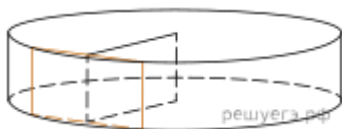
11. Аквариум имеет форму прямоугольного параллелепипеда с размерами $60 \text{ см} \times 20 \text{ см} \times 50 \text{ см}$. Сколько литров составляет объём аквариума? В одном литре 1000 кубических сантиметров.



12. Вписанный угол окружности на 42° меньше центрального угла, опирающегося на ту же дугу данной окружности. Найдите вписанный угол. Ответ дайте в градусах.



13. Радиус основания цилиндра равен 26, а его образующая равна 9. Сечение, параллельное оси цилиндра, удалено от неё на расстояние, равное 24. Найдите площадь этого сечения.



14. Найдите значение выражения $\frac{29}{7} : \left(\frac{2}{7} + \frac{3}{4} \right)$.

15. Магазин делает пенсионерам скидку на определенное количество процентов от цены покупки. Пакет кефира стоит в магазине 40 рублей. Пенсионер заплатил за пакет кефира 38 рублей. Сколько процентов составляет скидка для пенсионеров?

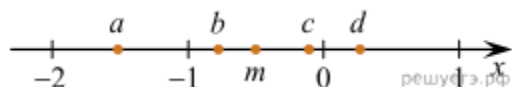
$$\frac{6\sqrt{3} \cdot 7\sqrt{3}}{42\sqrt{3}-1}.$$

16. Найдите значение выражения

17. Найдите корень уравнения $\log_2(5x - 7) - \log_2 5 = \log_2 21$.

18. На координатной прямой точками отмечены числа a , b , c , d и m . Установите соответствие между указанными точками и числами из правого столбца.

ТОЧКИ



ЧИСЛА

1) $m - \frac{1}{4}$

2) $-\frac{m}{2}$

3) $3m$

4) m^3

Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

a	b	c	d

19. Найдите четырёхзначное число, большее 2000, но меньшее 4000, которое делится на 18 и каждая следующая цифра которого больше предыдущей. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

20. По двум параллельным железнодорожным путям в одном направлении следуют пассажирский и товарный поезда, скорости которых равны соответственно 90 км/ч и 30 км/ч. Длина товарного поезда равна 600 метрам. Найдите длину пассажирского поезда, если время, за которое он прошел мимо товарного поезда, равно 1 минуте. Ответ дайте в метрах.

21. Саша пригласил Петю в гости, сказав, что живёт в седьмом подъезде в квартире № 462, а этаж сказать забыл. Подойдя к дому, Петя обнаружил, что дом семиэтажный. На каком этаже живёт Саша? (На каждом этаже число квартир одинаково, номера квартир в доме начинаются с единицы.)

2.6 Список литературы

- Швед, Е. А. Возможности оценивания уровня сформированности базовых знаний по математике в формате единого государственного экзамена / Е. А. Швед, Л. А. Болотюк, В. А. Болотюк // Мир науки, культуры, образования. - 2022. - № 3(94). - С. 16-20. URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_49188041_51852090.pdf

2. Разработка методического обеспечения процесса обучения тригонометрии в рамках подготовки к ЕГЭ по математике / Т. В. Деревянко, Л. Н. Горелова, А. А. Васильев, О. В. Васильева // Проблемы и перспективы современного образования: практика вуза и школы : Сборник научных трудов X Международной научно-практической конференции, Новокузнецк, 06 февраля 2026 года. - Новокузнецк: Кемеровский государственный университет, 2026. - С. 265-270. URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_91512542_27904641.pdf
3. Самуйлова, С. В. Классификация подходов к решению некоторых типов задач повышенной сложности в ЕГЭ по математике / С. В. Самуйлова, С. В. Самуйлов // Символ науки: международный научный журнал. - 2016. - № 3-2(15). - С. 124-126. URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_27644691_29309518.pdf
4. Кисельников, И. В. Онлайн-коммуникация школьников при подготовке к ЕГЭ по математике: вызовы и возможности / И. В. Кисельников // Динамика медиасистем. - 2025. - Т. 5, № 1. - С. 295-302. URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_82885961_76326882.pdf
5. Симоновская, Г. А. Методика использования опорных геометрических задач при подготовке к ЕГЭ по математике / Г. А. Симоновская, Е. В. Игонина // Современные проблемы физико-математических наук : Материалы IX Всероссийской научно-практической конференции, Орёл, 24-25 ноября 2023 года. - Орёл: Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, 2023. - С. 635-639. URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_80383943_72871682.pdf
6. Павлова, Т. А. Подготовка к ЕГЭ по математике в малых группах / Т. А. Павлова, М. Н. Уварова // Ученые записки Орловского государственного университета. - 2019. - № 2(83). - С. 296-300. URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_41370330_94661691.pdf

3. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА МОДУЛЯ 1

АРИФМЕТИКА, АЛГЕБРА И ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

Цель модуля:

Сформировать у обучающихся базовые вычислительные навыки, умение выполнять тождественные преобразования, решать линейные и квадратные уравнения, а также текстовые задачи основных типов (проценты, движение, работа, смеси), соответствующие заданиям № 1, 2, 4, 6, 8, 14, 15, 19, 20 ЕГЭ по математике базового уровня.

Задачи модуля:

1. Отработать действия с натуральными, целыми, рациональными числами, обыкновенными и десятичными дробями.
2. Научить решать задачи на проценты и пропорции.
3. Освоить свойства степеней с целыми показателями и арифметических корней.

4. Сформировать навыки тождественных преобразований алгебраических выражений (раскрытие скобок, приведение подобных, формулы сокращённого умножения).
5. Научить решать линейные и квадратные уравнения.
6. Отработать алгоритмы решения текстовых задач на движение, работу, смеси и сплавы.
7. Развить логическое мышление при решении задач на доказательные рассуждения (задание № 8).
8. Подготовить к выполнению промежуточной аттестации в формате ЕГЭ.

Планируемые результаты освоения модуля 1:

Обучающийся будет знать:

- правила выполнения арифметических действий с обыкновенными и десятичными дробями, процентами, степенями и корнями;
- формулы сокращённого умножения;
- алгоритмы решения линейных и квадратных уравнений;
- основные формулы для решения задач на проценты, движение, работу, смеси;
- методы извлечения информации из таблиц и диаграмм.

Обучающийся будет уметь:

- вычислять значения числовых выражений;
- решать линейные и квадратные уравнения;
- решать текстовые задачи указанных типов;
- выполнять тождественные преобразования;
- анализировать логические утверждения и делать выводы;
- оценивать правдоподобность полученного результата.

Учебный план модуля 1

Наименование тем		Всего	В том числе		Формы контроля и аттестации
			теория	практика	
Учебный кабинет	Тема 1.1. Арифметические действия с натуральными, целыми, рациональными числами	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 1.2. Действия с обыкновенными и десятичными дробями	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 1.3. Проценты и пропорции	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 1.4. Степени с целыми показателями и арифметические корни	2	1	1	Текущий контроль

Учебный кабинет	Тема 1.5. Тождественные преобразования алгебраических выражений	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 1.6. Формулы сокращённого умножения	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 1.7. Линейные уравнения	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 1.8. Квадратные уравнения (дискриминант, теорема Виета)	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 1.9. Текстовые задачи на проценты и части	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 1.10. Текстовые задачи на движение	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 1.11. Текстовые задачи на работу и смеси	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Промежуточная аттестация по модулю 1	2	-	2	Промежуточная аттестация
Итого:		24	11	13	

Календарный учебный график модуля 1

Наименование тем		Всего	В том числе		Учебная неделя, день недели
			теория	практика	
Учебный кабинет	Тема 1.1. Арифметические действия с натуральными, целыми, рациональными числами	2	1	1	1-я неделя, понедельник
Учебный кабинет	Тема 1.2. Действия с обыкновенными и десятичными дробями	2	1	1	1-я неделя, среда
Учебный кабинет	Тема 1.3. Проценты и пропорции	2	1	1	1-я неделя, пятница

Учебный кабинет	Тема 1.4. Степени с целыми показателями и арифметические корни	2	1	1	2-я неделя, понедельник
Учебный кабинет	Тема 1.5. Тождественные преобразования алгебраических выражений	2	1	1	2-я неделя, среда
Учебный кабинет	Тема 1.6. Формулы сокращённого умножения	2	1	1	2-я неделя, пятница
Учебный кабинет	Тема 1.7. Линейные уравнения	2	1	1	3-я неделя, понедельник
Учебный кабинет	Тема 1.8. Квадратные уравнения (дискриминант, теорема Виета)	2	1	1	3-я неделя, среда
Учебный кабинет	Тема 1.9. Текстовые задачи на проценты и части	2	1	1	3-я неделя, пятница
Учебный кабинет	Тема 1.10. Текстовые задачи на движение	2	1	1	4-я неделя, понедельник
Учебный кабинет	Тема 1.11. Текстовые задачи на работу и смеси	2	1	1	4-я неделя, среда
Учебный кабинет	Промежуточная аттестация по модулю 1	2	-	2	4-я неделя, пятница
Итого:		24	11	13	

Содержание модуля 1

Тема 1.1. Арифметические действия с натуральными, целыми, рациональными числами

Теория

Арифметика является фундаментом всей математики. В заданиях ЕГЭ базового уровня проверяются навыки выполнения основных арифметических действий с натуральными, целыми, рациональными и действительными числами. Ключевые правила, которые необходимо знать: порядок действий в числовых выражениях (сначала действия в скобках, затем умножение и деление, затем сложение и вычитание); сложение, вычитание, умножение и деление обыкновенных дробей (приведение к общему знаменателю, сокращение); действия с десятичными дробями (сложение и вычитание «в столбик», умножение и деление на 10, 100, 1000); сравнение чисел и расположение их на координатной прямой; округление чисел до указанного разряда.

Для успешного выполнения заданий №1 и №2 ЕГЭ базового уровня необходимо уверенно выполнять следующие операции.

Сложение и вычитание обыкновенных дробей: чтобы сложить дроби с разными знаменателями, нужно привести их к общему знаменателю, затем сложить числители, а знаменатель оставить без изменений. Например: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$.

Умножение и деление обыкновенных дробей: чтобы умножить дроби, нужно перемножить числители и знаменатели. Чтобы разделить дроби, нужно умножить первую дробь на дробь, обратную второй. Например: $2/3 \cdot 3/4 = 6/12 = 1/2$; $2/3 : 3/4 = 2/3 \cdot 4/3 = 8/9$.

Действия с десятичными дробями: при сложении и вычитании десятичные дроби записывают «в столбик» так, чтобы запятая была под запятой. При умножении десятичных дробей запятые не учитывают до получения результата, затем отделяют запятой столько знаков, сколько их содержится в обоих множителях вместе. Например: $2,5 \cdot 1,2 = 3,00 = 3$.

Свойства арифметических действий: переместительное ($a + b = b + a$; $a \cdot b = b \cdot a$), сочетательное ($(a + b) + c = a + (b + c)$; $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$) и распределительное ($a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$) свойства позволяют упрощать вычисления и преобразовывать выражения.

Особое внимание следует уделить порядку действий в выражениях, содержащих несколько арифметических действий. Например, в выражении $2 + 3 \cdot 4$ сначала выполняется умножение, затем сложение: $2 + 12 = 14$. Для изменения порядка действий используются скобки: $(2 + 3) \cdot 4 = 5 \cdot 4 = 20$.

Важным навыком является умение быстро и правильно выполнять вычисления без калькулятора, используя рациональные приёмы счёта: группировку слагаемых, вынесение общего множителя за скобки, использование формул сокращённого умножения для числовых выражений.

Практические задания

1. Выполните вычисления: а) $3/4 + 5/8$; б) $7/10 - 2/5$; в) $2/3 \cdot 6/7$; г) $5/6 : 10/12$; д) $2,5 + 3,75$; е) $4,2 \cdot 0,5$.
2. Найдите значение выражения: а) $2 + 3 \cdot 4$; б) $(2 + 3) \cdot 4$; в) $8 : 2 - 1$; г) $8 : (2 - 1)$; д) $0,5 + 0,25 \cdot 4$.
3. Расположите числа в порядке возрастания: $0,5$; $2/3$; $0,75$; $3/4$; $1/3$. Запишите результат сравнения в виде цепочки неравенств.
4. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями.

ВЕЛИЧИНЫ

- А) объём банки кетчупа
- Б) объём воды в озере Мичиган
- В) объём спальни комнаты
- Г) объём картонной коробки из-под телевизора

ЗНАЧЕНИЯ

1. 45 м^3
2. $0,4 \text{ л}$
3. 94 л
4. 4918 км^3

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

5. Найдите значение выражения $36 \cdot \left(\frac{17}{18} - \frac{5}{12} - \frac{4}{9}\right)$.

6. Найдите значение выражения $7,5: 1,5 \cdot 3,6$.

Тема 1.2. Действия с обыкновенными и десятичными дробями

Теория

Дроби - одна из ключевых тем арифметики. В ЕГЭ базового уровня часто встречаются задания на вычисления с обыкновенными и десятичными дробями, а также на преобразование одних в другие.

Обыкновенные дроби. Дробь вида $\frac{a}{b}$, где a - числитель, b - знаменатель. Основное свойство дроби: если числитель и знаменатель умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то дробь не изменится. Это позволяет сокращать дроби и приводить их к общему знаменателю.

- Сложение и вычитание. Чтобы сложить (вычесть) дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить (вычесть) числители, а знаменатель оставить. Если знаменатели разные, надо привести дроби к наименьшему общему знаменателю (НОЗ) - это наименьшее общее кратное знаменателей.
- Умножение. Чтобы умножить две дроби, надо перемножить их числители и знаменатели: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.
- Деление. Чтобы разделить одну дробь на другую, надо умножить первую дробь на дробь, обратную второй: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$.

Десятичные дроби. Десятичная дробь - это запись числа, в которой знаменатель является степенью 10 (10, 100, 1000 и т.д.). Правила действий:

- Сложение и вычитание: записывают числа «в столбик» так, чтобы запятая была под запятой, и выполняют действия, как с натуральными числами.
- Умножение: умножают числа, не обращая внимания на запятые, а затем в произведении отделяют запятой столько знаков справа, сколько их всего в обоих множителях.
- Деление: чтобы разделить десятичную дробь на натуральное число, делят, как обычно, но запятую в частном ставят, когда заканчивается целая часть. Для деления на десятичную дробь переносят запятую в делимом и делителе на столько знаков, сколько их в делителе, и делят на натуральное число.

Важно уметь переводить обыкновенную дробь в десятичную (разделив числитель на знаменатель) и обратно (записав десятичную дробь в виде обыкновенной со знаменателем 10, 100, ... и сократив).

Практические задания

1. Вычислите: а) $\frac{3}{8} + \frac{5}{12}$; б) $\frac{7}{10} - \frac{2}{15}$; в) $\frac{5}{6} \cdot \frac{9}{20}$; г) $\frac{8}{9} : \frac{4}{3}$.

2. Представьте в виде десятичной дроби: а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{7}{8}$; в) $\frac{5}{16}$.

3. Представьте в виде обыкновенной несократимой дроби: а) 0,25; б) 0,375; в) 0,125.

4. Вычислите: а) $5,6 + 2,34$; б) $12,7 - 4,25$; в) $3,2 \cdot 0,5$; г) $8,4 : 0,4$.

5. Найдите значение выражения $\left(\frac{5}{3} - \frac{7}{6}\right) : \frac{1}{21}$.

6. Найдите значение выражения $\frac{1,3+3,1}{1,1}$.

Тема 1.3. Проценты и пропорции

Теория

Проценты широко используются в заданиях ЕГЭ базового уровня (задания №3 и №6). Процент - это одна сотая часть числа. Обозначается символом «%». $1\% = 1/100 = 0,01$. Для решения задач на проценты необходимо уметь переводить проценты в десятичную дробь и обратно, находить процент от числа, число по его проценту и процентное отношение двух чисел.

Основные формулы для решения задач на проценты:

- Чтобы найти процент от числа, нужно число умножить на соответствующую десятичную дробь. Например: 20% от $300 = 300 \cdot 0,2 = 60$.
- Чтобы найти число по его проценту, нужно число разделить на соответствующую десятичную дробь. Например: если 25% числа равны 50 , то число равно $50 : 0,25 = 200$.
- Чтобы найти процентное отношение двух чисел, нужно одно число разделить на другое и умножить на 100% . Например: число 12 составляет от числа 48 : $12/48 \cdot 100\% = 25\%$.
- Чтобы увеличить число на $p\%$, нужно умножить его на $(1 + p/100)$. Например: увеличить 200 на 15% : $200 \cdot 1,15 = 230$.
- Чтобы уменьшить число на $p\%$, нужно умножить его на $(1 - p/100)$. Например: уменьшить 200 на 15% : $200 \cdot 0,85 = 170$.

Пропорция - это равенство двух отношений: $a/b = c/d$ (или $a : b = c : d$). Основное свойство пропорции: произведение крайних членов равно произведению средних: $a \cdot d = b \cdot c$. Пропорции используются при решении задач на проценты, а также в задачах на пропорциональное деление.

При решении текстовых задач на проценты важно правильно определить, от какого числа вычисляется процент. Часто встречаются задачи на сложные проценты (например, вклады в банке, изменение цены товара). В таких случаях применяется формула сложных процентов: $A = A_0 \cdot (1 + p/100)^n$, где A_0 - начальная величина, p - годовой процент, n - количество лет.

Практические задания

1. Переведите в десятичную дробь: 15% , 30% , 45% , 60% , 80% , 120% .
2. Найдите: а) 25% от 200 ; б) 30% от 150 ; в) 12% от 250 ; г) 60% от 80 .
3. Число увеличили на 20% , затем полученное число увеличили ещё на 10% . На сколько процентов увеличилось число по сравнению с первоначальным?
4. Цена товара повысилась с 500 рублей до 600 рублей. На сколько процентов повысилась цена?

5. Решите пропорцию: а) $x/4 = 3/2$; б) $5/x = 2/3$; в) $(x + 2)/3 = (x - 1)/2$.
6. В таблице представлены результаты соревнований по фигурному катанию среди одиночников. Итоговый балл спортсмена вычисляется по правилу: к оценке за технику прибавляется оценка за компоненты (артистизм), и из полученной суммы вычитаются штрафные баллы.

Спортсмен	Оценка за технику	Оценка за компоненты	Штрафные баллы
А. Иванов	45,0	41,5	1,0
Б. Петров	43,5	44,0	0,0
В. Сидоров	46,5	40,0	2,0
Г. Смирнов	44,0	43,0	0,5

Места распределяются по итоговому баллу: чем он выше, тем лучше место. Определите итоговый балл спортсмена, занявшего первое место.

7. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Томске с 8 по 24 января 2005 года. По горизонтали указаны числа месяца, по вертикали - количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линиями. Определите по рисунку наибольшее суточное количество осадков в Томске за данный период. Ответ дайте в миллиметрах.

Тема 1.4. Степени с целыми показателями и арифметические корни

Теория

Степени и корни являются важными элементами школьной математики. В заданиях ЕГЭ базового уровня (задания №4 и №5) проверяются навыки выполнения действий со степенями и арифметическими корнями.

Определение степени с натуральным показателем: $a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ (n раз). Основные свойства степеней:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (умножение степеней с одинаковыми основаниями)
- $a^m : a^n = a^{m-n}$ (деление степеней с одинаковыми основаниями)
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ (возведение степени в степень)
- $(ab)^n = a^n \cdot b^n$ (степень произведения)
- $(a/b)^n = a^n/b^n$ (степень частного)

Степень с нулевым показателем: $a^0 = 1$ (при $a \neq 0$). Степень с отрицательным показателем: $a^{-n} = 1/a^n$ (при $a \neq 0$). Дробный показатель степени: $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ (при $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$).

Арифметический корень n -й степени из числа a - это такое число b , что $b^n = a$. Для чётных n (2, 4, 6, ...) корень определяется только для $a \geq 0$. Для нечётных n (3, 5, 7, ...) корень определён для любого a . Основные свойства корней:

- $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ (корень из произведения)
- $\sqrt[n]{a/b} = \sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b}$ (корень из частного)
- $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ (возведение корня в степень)
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$ (корень из корня)

Особое внимание следует уделить преобразованиям выражений, содержащих квадратные корни: вынесение множителя из-под знака корня, внесение множителя под знак корня, освобождение от иррациональности в знаменателе, приведение подобных радикалов.

Практические задания

1. Найдите значение выражения: а) 2^3 ; б) 3^4 ; в) 5^2 ; г) 10^6 .
2. Вычислите: а) $2^3 \cdot 2^2$; б) $3^5 : 3^2$; в) $(2^3)^2$; г) $4^2 \cdot 4^3$.
3. Вычислите: а) $\sqrt{49}$; б) $\sqrt{144}$; в) $\sqrt[3]{8}$; г) $\sqrt[4]{16}$.
4. Упростите: а) $\sqrt{32}$; б) $\sqrt{18}$; в) $\sqrt{72}$; г) $\sqrt{(2^2 \cdot 3^3)}$.
5. В фирме «Эх, прокачу!» стоимость поездки на такси длительностью меньше 5 минут составляет 150 рублей. Если поездка длится 5 минут или дольше, то её стоимость (в рублях) рассчитывается по формуле: $C = 150 + 11(t - 5)$, где t - длительность поездки в минутах ($t \geq 5$). Пользуясь этой формулой, рассчитайте стоимость 16-минутной поездки. Ответ дайте в рублях.
6. Найдите значение выражения $57 \cdot 10 - 2,2 \cdot 10^2$.

Тема 1.5. Тождественные преобразования алгебраических выражений

Теория

Тождественные преобразования алгебраических выражений - это основа для решения уравнений, неравенств и многих других задач. В заданиях ЕГЭ базового уровня проверяется умение раскрывать скобки, приводить подобные слагаемые, применять формулы сокращённого умножения и разлагать многочлены на множители.

Основные операции с алгебраическими выражениями:

- Приведение подобных слагаемых: $3x + 2x = 5x$; $4a - 7a + 2a = -a$.
- Раскрытие скобок: $a(b + c) = ab + ac$; $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.

Формулы сокращённого умножения (будут подробно рассмотрены в теме 1.6):

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Разложение многочленов на множители:

- Вынесение общего множителя за скобки: $6x^2 - 4x = 2x(3x - 2)$
- Использование формул сокращённого умножения: $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$
- Метод группировки: $ab + ac + b^2 + bc = (a + b)(b + c)$

Важно уметь выполнять преобразования в выражениях, содержащих дроби, степени и корни. Например: сокращение дробей (вынесение общего множителя в числителе и

знаменателе), приведение дробей к общему знаменателю, упрощение выражений с корнями (вынесение множителя из-под корня, избавление от иррациональности в знаменателе).

Практические задания

1. Приведите подобные слагаемые: а) $3x + 5x - 2x$; б) $4a - 7a + 3a$; в) $2x^2 - 5x^2 + 3x^2$; г) $3a + 2b - a + 4b$.
2. Раскройте скобки и приведите подобные: а) $2(x + 3) + 3(x - 2)$; б) $4(2a - 1) - 3(a + 2)$; в) $(x + 2)(x - 3)$; г) $(2a - 1)(a + 3)$.
3. Разложите на множители: а) $x^2 - 16$; б) $a^2 - 9$; в) $x^2 + 4x + 4$; г) $a^2 - 6a + 9$; д) $x^3 - 8$; е) $a^3 + 27$.
4. Упростите выражение: а) $(x - 2)(x + 2) - (x - 3)^2$; б) $(a + 1)^2 - (a - 1)^2$; в) $(2x + 3)^2 - (2x - 3)^2$.

Тема 1.6. Формулы сокращённого умножения

Теория

Формулы сокращённого умножения позволяют быстро и безошибочно преобразовывать выражения, раскладывать многочлены на множители и упрощать вычисления.

Основные формулы:

1. Квадрат суммы: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. Квадрат разности: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. Разность квадратов: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
4. Сумма кубов: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
5. Разность кубов: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
6. Куб суммы: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
7. Куб разности: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

На практике чаще всего используются первые три, а также кубы для более сложных преобразований. Важно уметь применять формулы как слева направо (раскрытие скобок), так и справа налево (разложение на множители).

Практические задания

1. Раскройте скобки, используя формулы:
а) $(x + 3)^2$; б) $(2x - 5)^2$; в) $(3a + 4b)^2$; г) $(5 - 2y)^2$.
2. Представьте в виде многочлена:
а) $(x - 2)(x + 2)$; б) $(3a + 1)(3a - 1)$; в) $(2x^2 - y)(2x^2 + y)$.
3. Разложите на множители:
а) $4x^2 - 9$; б) $25a^2 - 16b^2$; в) $x^2 - 10x + 25$; г) $9a^2 + 6a + 1$; д) $x^3 - 27$; е) $8a^3 + b^3$.
4. Упростите выражение:
а) $(2x + 3)^2 - (2x - 3)^2$; б) $(x - 1)(x + 1) - x^2$; в) $(a + b)^2 - (a - b)^2$.
5. Вычислите рациональным способом: 101^2 (используя $(100 + 1)^2$).

Тема 1.7. Линейные уравнения

Теория

Линейное уравнение - это уравнение вида $ax + b = 0$, где a и b - числа, x - переменная. Алгоритм решения: перенести слагаемые с переменной в левую часть, без переменной - в правую, привести подобные, разделить обе части на коэффициент при переменной.

Если уравнение содержит дроби, его можно умножить на общий знаменатель, чтобы избавиться от дробей. Также к линейным сводятся уравнения, в которых после раскрытия скобок и приведения подобных получается выражение $ax + b = 0$.

Важно помнить, что при делении на отрицательное число знак равенства не меняется (в отличие от неравенств). Корень линейного уравнения единственный (если $a \neq 0$). Если $a = 0$, то уравнение либо не имеет решений (при $b \neq 0$), либо имеет бесконечно много решений (при $b = 0$).

В ЕГЭ базового уровня линейные уравнения могут встречаться как самостоятельные задания (№17), а также входить в текстовые задачи.

Практические задания

1. Решите линейные уравнения:

а) $3x + 7 = 13$;

б) $5x - 8 = 2x + 1$;

в) $2(x - 3) = 4x + 6$;

г) $\frac{x+2}{3} = \frac{x-1}{2}$.

2. Найдите корень уравнения $\log_7(8 - 2x) - \log_7 8 = \log_7 \frac{1}{40}$. (Сначала упростите левую часть по свойствам логарифмов, затем решите линейное уравнение.)

3. Найдите корень уравнения $(x - 5)^2 = (x - 7)^2$. (После раскрытия скобок и приведения подобных получится линейное.)

4. Найдите корень уравнения $6^{x-12} = \frac{1}{36}$. (Приведите к одинаковому основанию и решите линейное относительно показателя.)

Тема 1.8. Квадратные уравнения (дискриминант, теорема Виета)

Теория

Квадратное уравнение - это уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$. Решение квадратного уравнения:

- Найти дискриминант $D = b^2 - 4ac$.
- Если $D > 0$, то уравнение имеет два корня: $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.
- Если $D = 0$, то один корень: $x = \frac{-b}{2a}$.
- Если $D < 0$, то корней нет.

Теорема Виета для приведённого квадратного уравнения (где $a = 1$): если x_1 и x_2 - корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, то $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$. Теорема Виета позволяет подбирать корни без вычисления дискриминанта, особенно если корни целые.

Также встречаются неполные квадратные уравнения (вида $ax^2 + bx = 0$, $ax^2 + c = 0$), которые решаются вынесением общего множителя или переносом и извлечением корня. В ЕГЭ базового уровня квадратные уравнения могут быть заданы в явном виде (задание №17) или входить в текстовые задачи (например, для нахождения неизвестной величины).

Практические задания

1. Решите квадратные уравнения:
2. а) $x^2 - 5x + 6 = 0$;
б) $x^2 + 3x - 10 = 0$;
в) $2x^2 - 7x + 3 = 0$;
г) $x^2 + 4x + 4 = 0$;
д) $3x^2 - 2x + 5 = 0$.
3. Используя теорему Виета, найдите корни уравнения:
4. а) $x^2 - 7x + 12 = 0$;
б) $x^2 + 5x + 6 = 0$;
в) $x^2 - 2x - 15 = 0$.
5. Решите биквадратное уравнение: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$. (Введите замену $t = x^2$, решите квадратное, затем найдите x .)
6. Решите уравнение $\sqrt{13 - x} = 3$. (Возведите обе части в квадрат, получите линейное - для практики добавьте иррациональное, сводящееся к квадратному, например $\sqrt{x + 5} = x - 1$.)
7. Задание из варианта: «Решите уравнение $x^2 = 17x - 72$. Если уравнение имеет больше одного корня, в ответе запишите больший из них.»

Тема 1.9. Текстовые задачи на проценты и части

Теория

Текстовые задачи на проценты и части - это одна из самых частых тем в ЕГЭ (задания №2, №15, №19). В таких задачах требуется вычислить процент от числа, найти число по его проценту, определить процентное отношение, а также решать задачи на смеси и сплавы (но они будут в теме 1.11). Здесь мы фокусируемся на классических задачах: скидки, банковские проценты, доли от целого.

Алгоритм решения:

1. Внимательно прочитать условие, определить, что дано и что нужно найти.
2. Если задача на проценты, выразить проценты в виде десятичной дроби или обыкновенной.
3. Составить уравнение, если неизвестное обозначено через переменную.
4. Решить уравнение, проверить ответ на правдоподобие.

Основные формулы уже даны в теме 1.3. Здесь мы применяем их к реальным ситуациям.

Практические задания

1. Держатели дисконтной карты книжного магазина получают при покупке скидку 10%. Книга стоит 330 рублей. Сколько рублей заплатит держатель дисконтной карты за эту книгу?
2. Четверть всех отдыхающих в пансионате - дети. Какой процент от всех отдыхающих составляют дети?
3. Площадь земель фермерского хозяйства, отведённых под посадку сельскохозяйственных культур, составляет 36 гектаров и распределена между зерновыми и овощными культурами в отношении 2 : 7 соответственно. Сколько гектаров занимают овощные культуры?
4. Банк начисляет на срочный вклад 14% годовых. Вкладчик положил на счёт 9000 рублей. Сколько рублей будет на этом счёте через год, если никаких операций, кроме начисления процентов, со счётом проводиться не будет?
5. Цена товара повысилась с 500 до 600 рублей. На сколько процентов повысилась цена?
6. В магазине товар стоит 1200 рублей. На него сделали скидку 25%. Сколько теперь стоит товар?

Тема 1.10. Текстовые задачи на движение

Теория

Задачи на движение - традиционный тип задач, входящих в ЕГЭ (задание №20).

Основная формула: $S = vt$, где S - расстояние, v - скорость, t - время. Различают:

- Движение навстречу (скорость сближения равна сумме скоростей).
- Движение в одном направлении (скорость сближения равна разности скоростей, если один догоняет другого).
- Движение по реке: скорость по течению = собственная скорость + скорость течения; против течения = собственная - скорость течения.
- Средняя скорость: $v_{\text{ср}} = \frac{S_{\text{общ}}}{t_{\text{общ}}}$.

При решении полезно составлять таблицу, в которой для каждого участника или этапа записывают известные и неизвестные величины, а затем выражают одну из величин через другие и приравнивают.

Практические задания

1. Автомобиль проехал 240 км за 4 часа. С какой скоростью двигался автомобиль? Сколько времени потребуется, чтобы проехать это же расстояние со скоростью на 20 км/ч больше?
2. Два человека отправляются из одного и того же места на прогулку до опушки леса, находящейся в 4,5 км от места отправления. Один идёт со скоростью 4 км/ч, а другой - со скоростью 5 км/ч. Дойдя до опушки, второй с той же скоростью возвращается обратно. На каком расстоянии от точки отправления произойдёт их встреча?
3. Расстояние между городами А и В равно 610 км. Из города А в город В со скоростью 50 км/ч выехал первый автомобиль, а через час после этого навстречу

ему из города В выехал со скоростью 90 км/ч второй автомобиль. На каком расстоянии от города А автомобили встретятся?

- Первую треть трассы автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, вторую треть - со скоростью 100 км/ч, а последнюю - со скоростью 30 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.
- Лодка проплыла по течению реки 36 км за 3 часа, а против течения - 36 км за 4 часа. Найдите скорость течения реки и собственную скорость лодки.

Тема 1.11. Текстовые задачи на работу и смеси

Теория

Задачи на работу. Основная формула: $A = Pt$, где A - работа (объём работы), P - производительность (скорость работы), t - время. Обычно работу принимают за 1 (если не указана конкретная величина). При совместной работе производительности складываются. Часто в задачах даётся время, за которое каждый рабочий выполняет всю работу, и требуется найти время совместной работы.

Задачи на смеси и сплавы. В этих задачах рассматривается смесь нескольких веществ с разной концентрацией. Концентрация - это отношение массы вещества к общей массе раствора, выраженное в процентах. При смешивании растворов масса вещества в новом растворе равна сумме масс веществ в исходных, а общая масса - сумме масс исходных. Используется уравнение на массу вещества.

Практические задания

- Один рабочий выполняет заказ за 6 дней, а второй - за 3 дня. За сколько дней они выполнят заказ, работая вместе?
- Смешали 8 литров 15-процентного раствора вещества с 12 литрами 40-процентного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?
- Имеется два сплава: первый содержит 20% меди, второй - 50% меди. Сколько нужно взять каждого сплава, чтобы получить 30 кг сплава с содержанием меди 30%?
- Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 4 дня. Первый рабочий, работая отдельно, может выполнить эту работу за 6 дней. За сколько дней выполнит эту работу второй рабочий?
- Смешали 4 кг 20-процентного раствора вещества с 6 кг 35-процентного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?
- Имеется два сплава. Первый сплав содержит 40% меди, второй - 15% меди. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 35% меди. Масса первого сплава равна 20 кг. Найдите массу третьего сплава.

4. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА МОДУЛЯ 2

УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА И ГЕОМЕТРИЯ

Цель модуля: Сформировать у обучающихся навыки решения уравнений и неравенств различных типов, работы с функциями и их графиками, а также решения планиметрических и стереометрических задач, соответствующих заданиям № 9, 10, 11, 12, 13, 17, 18 ЕГЭ по математике базового уровня.

Задачи модуля

1. Систематизировать знания о способах решения рациональных, иррациональных, показательных, логарифмических и тригонометрических уравнений.
2. Сформировать навыки решения систем уравнений.
3. Обучить методам решения линейных, квадратных, рациональных, показательных и логарифмических неравенств.
4. Развить умение решать планиметрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей).
5. Сформировать навыки решения стереометрических задач на нахождение объёмов и площадей поверхностей.
6. Воспитывать ответственное отношение к проверке полученных результатов и соблюдению правил оформления решений.

Планируемые результаты освоения модуля 2

Обучающийся будет знать:

- способы решения рациональных, иррациональных, показательных, логарифмических и простейших тригонометрических уравнений;
- алгоритмы решения систем уравнений (подстановка, сложение);
- методы решения линейных, квадратных, рациональных, показательных и логарифмических неравенств;
- формулы для вычисления геометрических величин: площади и периметра плоских фигур, объёма и площади поверхности тел;
- свойства геометрических фигур (треугольников, четырёхугольников, окружности).

Обучающийся будет уметь:

- решать рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические и простейшие тригонометрические уравнения;
- решать системы уравнений;
- решать линейные, квадратные, рациональные, показательные и логарифмические неравенства;
- решать планиметрические задачи на нахождение геометрических величин (задания № 9, 10, 12);
- решать стереометрические задачи на нахождение объёмов и площадей поверхностей (задания № 11, 13);
- проверять корни уравнений на принадлежность ОДЗ;
- оценивать правдоподобность полученного геометрического результата.

Учебный план модуля 2

Наименование тем		Всего	В том числе		Формы контроля и аттестации
			теория	практика	
Учебный кабинет	Тема 2.1. Рациональные уравнения (дробно-рациональные)	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 2.2. Иррациональные уравнения (с корнями)	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 2.3. Показательные уравнения	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 2.4. Логарифмические уравнения	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 2.5. Тригонометрические уравнения (простейшие)	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 2.6. Системы уравнений (подстановка, сложение)	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 2.7. Линейные и квадратные неравенства	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 2.8. Рациональные неравенства	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 2.9. Показательные и логарифмические неравенства	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 2.10. Планиметрия: треугольники, четырёхугольники, площади	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 2.11. Планиметрия: окружность и прикладные задачи	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 2.12. Стереометрия: объёмы	2	1	1	Текущий контроль

	и площади поверхностей				
Учебный кабинет	Промежуточная аттестация по модулю 2	2	-	2	Промежуточная аттестация
	Итого:	26	12	14	

Календарный учебный график модуля

Наименование тем		Всего	В том числе		Учебная неделя, день недели
			теория	практика	
Учебный кабинет	Тема 2.1. Рациональные уравнения (дробно-рациональные)	2	1	1	5-я неделя, понедельник
Учебный кабинет	Тема 2.2. Иррациональные уравнения (с корнями)	2	1	1	5-я неделя, среда
Учебный кабинет	Тема 2.3. Показательные уравнения	2	1	1	5-я неделя, пятница
Учебный кабинет	Тема 2.4. Логарифмические уравнения	2	1	1	6-я неделя, понедельник
Учебный кабинет	Тема 2.5. Тригонометрические уравнения (простейшие)	2	1	1	6-я неделя, среда
Учебный кабинет	Тема 2.6. Системы уравнений (подстановка, сложение)	2	1	1	6-я неделя, пятница
Учебный кабинет	Тема 2.7. Линейные и квадратные неравенства	2	1	1	7-я неделя, понедельник
Учебный кабинет	Тема 2.8. Рациональные неравенства	2	1	1	7-я неделя, среда
Учебный кабинет	Тема 2.9. Показательные и логарифмические неравенства	2	1	1	7-я неделя, пятница
Учебный кабинет	Тема 2.10. Планиметрия: треугольники, четырёхугольники, площади	2	1	1	8-я неделя, понедельник
Учебный кабинет	Тема 2.11. Планиметрия: окружность и прикладные задачи	2	1	1	8-я неделя, среда

Учебный кабинет	Тема 2.12. Стереометрия: объёмы и площади поверхностей	2	1	1	8-я неделя, пятница
Учебный кабинет	Промежуточная аттестация по модулю 2	2	-	2	9-я неделя, понедельник
	Итого:	26	12	14	

Содержание модуля 2

Тема 2.1. Рациональные уравнения

Теория

Рациональные уравнения - это уравнения, в которых переменная содержится в знаменателе. В задании №17 ЕГЭ базового уровня могут встретиться такие уравнения.

Основной алгоритм решения:

1. Найти область допустимых значений (ОДЗ) - значения переменной, при которых знаменатель не обращается в нуль.
2. Привести уравнение к общему знаменателю.
3. Решить полученное уравнение (чаще всего линейное или квадратное).
4. Проверить, входят ли найденные корни в ОДЗ. Корни, не входящие в ОДЗ, отбрасываются.

Важно: при решении уравнений с дробями нельзя сокращать на выражение, содержащее переменную, если оно может обращаться в нуль (это приведёт к потере корней). ОДЗ - одна из самых частых ошибок на экзамене.

Рассмотрим подробно несколько примеров.

Пример 1. $\frac{x+2}{x-1} = 3$.

- ОДЗ: $x - 1 \neq 0$, то есть $x \neq 1$.
- Умножаем обе части на $(x - 1)$: $x + 2 = 3(x - 1)$.
- Раскрываем скобки: $x + 2 = 3x - 3$.
- Переносим x в левую часть, числа в правую: $2 + 3 = 3x - x$, $5 = 2x$, $x = 2,5$.
- Проверка: $2,5 \neq 1$, значит, корень подходит.
- Ответ: 2,5.

Пример 2. $\frac{3}{x-2} + \frac{4}{x+2} = 1$.

- ОДЗ: $x \neq 2$ и $x \neq -2$.
- Общий знаменатель: $(x - 2)(x + 2)$.
- Умножаем каждую дробь на общий знаменатель: $3(x + 2) + 4(x - 2) = (x - 2)(x + 2)$.
- Раскрываем скобки: $3x + 6 + 4x - 8 = x^2 - 4$.
- Приводим подобные: $7x - 2 = x^2 - 4$.
- Переносим всё в одну часть: $x^2 - 7x - 2 = 0 \rightarrow x^2 - 7x - 2 = 0$. (Здесь лучше сначала перенести правильно: $0 = x^2 - 4 - 7x + 2 \rightarrow x^2 - 7x - 2 = 0$.)

- Решаем квадратное уравнение: $D = 49 + 8 = 57$, $x = \frac{7 \pm \sqrt{57}}{2}$.
- Проверка: оба корня не равны 2 и -2, значит, оба подходят.
- Ответ: $\frac{7 \pm \sqrt{57}}{2}$.

Пример 3 . $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$.

- ОДЗ: $x > 0$ (под корнем) и $x \neq 0$ (знаменатель не должен быть нулём).
- Умножаем обе части на $2\sqrt{x}$: $2 = \sqrt{x}$.
- Возводим в квадрат: $x = 4$.
- Проверка: $x = 4 > 0$, подходит.
- Ответ: 4.

Типичные ошибки:

- Забывают про ОДЗ и включают посторонние корни.
- Сокращают на x или $(x - a)$, теряя корни.
- Не проверяют корни подстановкой в исходное уравнение.

Практические задания

1. Решите уравнение: $\frac{x-3}{x+2} = 0$.
2. Решите уравнение: $\frac{2x-1}{x+3} = 1$.
3. Решите уравнение: $\frac{3}{x-2} + \frac{4}{x+2} = 1$.
4. Решите уравнение: $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$.
5. Найдите корень уравнения $\log_{\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{4}x - 1\right) = 2$. (После применения определения логарифма получится линейное или рациональное уравнение - проверьте ОДЗ логарифма.)
6. Решите уравнение: $\frac{5x-7}{x-1} = \frac{3x+1}{x+2}$.
7. Решите уравнение: $\frac{x^2-4}{x-2} = 5$. (Найдите ОДЗ, сократите, решите.)

Тема 2.2. Иррациональные уравнения

Теория

Иррациональные уравнения - это уравнения, в которых переменная содержится под знаком корня. В задании №17 ЕГЭ базового уровня могут встретиться простейшие иррациональные уравнения. Основной метод решения - возведение обеих частей уравнения в степень, соответствующую степени корня.

Алгоритм решения:

1. Уединить корень (перенести все члены, не содержащие корень, в другую часть).
2. Возвести обе части уравнения в степень, равную показателю корня.
3. Решить полученное уравнение (чаще всего линейное или квадратное).
4. Выполнить проверку: подставить найденные корни в исходное уравнение, так как при возведении в чётную степень могут появиться посторонние корни.

Важно: при возведении в чётную степень проверка ОБЯЗАТЕЛЬНА! При возведении в нечётную степень проверка не обязательна, но желательна.

Рассмотрим подробно несколько примеров.

Пример 1. $\sqrt{13 - x} = 3$.

- Возводим обе части в квадрат: $13 - x = 9$.
- Решаем: $-x = 9 - 13 = -4$, $x = 4$.
- Проверка: $\sqrt{13 - 4} = \sqrt{9} = 3$. Верно.
- Ответ: 4.

Пример 2 (с посторонним корнем). $\sqrt{x + 5} = x - 1$.

- ОДЗ: $x + 5 \geq 0 \rightarrow x \geq -5$; $x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$. Итого: $x \geq 1$.
- Возводим в квадрат: $x + 5 = (x - 1)^2$.
- Раскрываем скобки: $x + 5 = x^2 - 2x + 1$.
- Переносим всё в одну часть: $0 = x^2 - 3x - 4$.
- Решаем квадратное уравнение: $x^2 - 3x - 4 = 0$. Корни: $x_1 = 4$, $x_2 = -1$.
- Проверка:
 - $x = 4$: $\sqrt{4 + 5} = \sqrt{9} = 3$, $4 - 1 = 3$. Подходит.
 - $x = -1$: $\sqrt{-1 + 5} = \sqrt{4} = 2$, $-1 - 1 = -2$. Не подходит.
- Ответ: 4.

Пример 3 (с двумя корнями). $\sqrt{5x - 1} = \sqrt{2x}$.

- ОДЗ: $5x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq 0,2$; $2x \geq 0 \rightarrow x \geq 0$. Итого: $x \geq 0,2$.
- Возводим в квадрат: $5x - 1 = 2x$.
- Решаем: $3x = 1$, $x = \frac{1}{3}$.
- Проверка: $\sqrt{5 \cdot \frac{1}{3} - 1} = \sqrt{\frac{5}{3} - 1} = \sqrt{\frac{2}{3}}$; $\sqrt{2 \cdot \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Верно.
- Ответ: $\frac{1}{3}$.

Пример 4 (корень и линейное выражение). $\sqrt{2x + 7} = x + 2$.

- ОДЗ: $2x + 7 \geq 0 \rightarrow x \geq -3,5$; $x + 2 \geq 0 \rightarrow x \geq -2$. Итого: $x \geq -2$.
- Возводим в квадрат: $2x + 7 = (x + 2)^2$.
- Раскрываем скобки: $2x + 7 = x^2 + 4x + 4$.
- Переносим: $0 = x^2 + 2x - 3$.
- Корни: $x_1 = 1$, $x_2 = -3$.
- Проверка:
 - $x = 1$: $\sqrt{2 + 7} = \sqrt{9} = 3$, $1 + 2 = 3$. Подходит.
 - $x = -3$: $\sqrt{-6 + 7} = \sqrt{1} = 1$, $-3 + 2 = -1$. Не подходит.
- Ответ: 1.

Типичные ошибки:

- Забывают про ОДЗ или про проверку.
- При возведении в квадрат теряют знак минус (например, $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$, а не $x^2 + 1$).

- Не проверяют корни в исходном уравнении.

Практические задания

1. Решите уравнение $\sqrt{13 - x} = 3$.
2. Решите уравнение $\sqrt{x + 2} = 4$.
3. Решите уравнение $\sqrt{2x - 3} = 5$.
4. Решите уравнение $\sqrt{x^2 - 3x} = 2$. (Возведите в квадрат, решите квадратное уравнение, проверьте.)
5. Решите уравнение $\sqrt{x + 3} = x - 3$. (Найдите ОДЗ, возведите в квадрат, решите, проверьте.)
6. Решите уравнение $\sqrt{2x + 7} = x + 2$.
7. Решите уравнение $\sqrt{5x - 1} - \sqrt{2x} = 0$. (Перенесите один корень вправо, возведите в квадрат.)

Тема 2.3. Показательные уравнения

Теория

Показательные уравнения - это уравнения, в которых переменная содержится в показателе степени. В задании №17 ЕГЭ базового уровня могут встретиться простейшие показательные уравнения. Основной метод решения - приведение обеих частей уравнения к степени с одинаковым основанием.

Основные свойства степеней, необходимые для решения:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $a^m : a^n = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $a^0 = 1$ (при $a \neq 0$)
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ (при $a > 0$)

Алгоритм решения:

1. Представить обе части уравнения в виде степени с одинаковым основанием.
2. Приравнять показатели степеней (так как функция a^x монотонна).
3. Решить полученное уравнение (чаще всего линейное).

Важно: основание степени должно быть положительным и не равным 1.

Рассмотрим подробно несколько примеров.

Пример 1. $3^x = 81$.

- $81 = 3^4$, значит $3^x = 3^4$.
- Приравниваем показатели: $x = 4$.
- Ответ: 4.

Пример 2. $2^{x+1} = 8$.

- $8 = 2^3$, значит $2^{x+1} = 2^3$.
- Приравниваем: $x + 1 = 3$, $x = 2$.

- Ответ: 2.

Пример 3 . $\left(\frac{1}{4}\right)^{2-x} = 64$.

- Преобразуем: $\frac{1}{4} = 2^{-2}$, $64 = 2^6$.
- Получаем: $(2^{-2})^{2-x} = 2^6$.
- По свойству $(a^m)^n = a^{mn}$: $2^{-2(2-x)} = 2^6$.
- Упрощаем: $-4 + 2x = 6$.
- Решаем: $2x = 10$, $x = 5$.
- Ответ: 5.

Пример 4. $6^{x-12} = \frac{1}{36}$.

- $36 = 6^2$, значит $\frac{1}{36} = 6^{-2}$.
- Получаем: $6^{x-12} = 6^{-2}$.
- Приравниваем: $x - 12 = -2$, $x = 10$.
- Ответ: 10.

Пример 5 (более сложный). $4^x - 2^{x+1} - 8 = 0$.

- Замечаем, что $4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$, а $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$.
- Делаем замену: $t = 2^x$, $t > 0$.
- Получаем: $t^2 - 2t - 8 = 0$.
- Решаем квадратное уравнение: $D = 4 + 32 = 36$, $t_1 = 4$, $t_2 = -2$ (не подходит, так как $t > 0$).
- Возвращаемся к замене: $2^x = 4 = 2^2$, значит $x = 2$.
- Ответ: 2.

Типичные ошибки:

- Неправильное преобразование дробных и отрицательных степеней.
- Потеря корней при делении на выражение с переменной.
- Забывают, что $a^x > 0$ при $a > 0$, и отбрасывают отрицательные корни при замене.

Практические задания

1. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{4}\right)^{2-x} = 64$.
2. Решите уравнение $2^x = 16$.
3. Решите уравнение $5^{x-2} = 125$.
4. Решите уравнение $3^{2x+1} = 27$.
5. Решите уравнение $6^{x-12} = \frac{1}{36}$.
6. Решите уравнение $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x+4} : \left(\frac{1}{5}\right)^{-5x-2} = \frac{1}{125}$. (Используйте свойства степеней.)
7. Решите уравнение $4^x - 2^{x+1} - 8 = 0$. (Сделайте замену $t = 2^x$.)
8. Решите уравнение $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$. (Сделайте замену $t = 3^x$.)

Тема 2.4. Логарифмические уравнения

Теория

Логарифмические уравнения - это уравнения, содержащие переменную под знаком логарифма. В задании №17 ЕГЭ базового уровня могут встретиться простейшие логарифмические уравнения.

Определение логарифма: $\log_a b = c$ означает, что $a^c = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

Основные свойства логарифмов:

- $\log_a a = 1$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$
- $\log_a(b/c) = \log_a b - \log_a c$
- $\log_a b^k = k \cdot \log_a b$
- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ (формула перехода к новому основанию, на базовом уровне используется редко)

Алгоритм решения простейших логарифмических уравнений:

1. Найти ОДЗ: выражение под знаком логарифма должно быть положительным.
2. Применить определение логарифма или свойства логарифмов для упрощения.
3. Решить полученное уравнение (чаще всего линейное или квадратное).
4. Проверить, входит ли корень в ОДЗ.

Важно: ОДЗ логарифма - это НЕ просто $x > 0$, а всё выражение под знаком логарифма должно быть > 0 .

Рассмотрим подробно несколько примеров.

Пример 1. $\log_2(x - 1) + \log_2 6 = \log_2 18$.

- ОДЗ: $x - 1 > 0 \rightarrow x > 1$.
- По свойству $\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$: $\log_2((x - 1) \cdot 6) = \log_2 18$.
- Так как основания равны, приравниваем выражения: $6(x - 1) = 18$.
- Решаем: $x - 1 = 3$, $x = 4$.
- Проверка: $4 > 1$, подходит.
- Ответ: 4.

Пример 2 . $\log_3(5x + 10) - \log_3 5 = \log_3 4$.

- ОДЗ: $5x + 10 > 0 \rightarrow x > -2$.
- По свойству $\log_a b - \log_a c = \log_a(b/c)$: $\log_3 \frac{5x+10}{5} = \log_3 4$.
- Приравниваем: $\frac{5x+10}{5} = 4$.
- Решаем: $5x + 10 = 20$, $5x = 10$, $x = 2$.
- Проверка: $2 > -2$, подходит.
- Ответ: 2.

Пример 3. $\log_3(2x - 1) = 2$.

- ОДЗ: $2x - 1 > 0 \rightarrow x > 0,5$.
- По определению логарифма: $2x - 1 = 3^2 = 9$.
- Решаем: $2x = 10$, $x = 5$.

- Проверка: $5 > 0,5$, подходит.
- Ответ: 5.

Пример 4. $\log_{\frac{5}{4}}(5x + 1) = -1$.

- ОДЗ: $5x + 1 > 0 \rightarrow x > -0,2$.
- По определению: $5x + 1 = \left(\frac{5}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{5}$.
- Решаем: $5x = \frac{4}{5} - 1 = -\frac{1}{5}, x = -\frac{1}{25}$.
- Проверка: $-\frac{1}{25} > -0,2$ (так как $-0,04 > -0,2$), подходит.
- Ответ: $-\frac{1}{25}$.

Пример 5 (с разными основаниями). $\log_7(8 - 2x) - \log_7 8 = \log_7 \frac{1}{40}$.

- ОДЗ: $8 - 2x > 0 \rightarrow x < 4$.
- По свойству: $\log_7 \frac{8-2x}{8} = \log_7 \frac{1}{40}$.
- Приравняем: $\frac{8-2x}{8} = \frac{1}{40}$.
- Решаем: $8 - 2x = \frac{8}{40} = 0,2, -2x = 0,2 - 8 = -7,8, x = 3,9$.
- Проверка: $3,9 < 4$, подходит.
- Ответ: 3,9.

Типичные ошибки:

- Забывают про ОДЗ логарифма.
- Неправильно применяют свойства логарифмов (путают сумму и произведение).
- При использовании определения логарифма неправильно возводят в степень.

Практические задания

1. Найдите корень уравнения $\log_2(x - 1) + \log_2 6 = \log_2 18$.
2. Решите уравнение $\log_3(5x + 10) - \log_3 5 = \log_3 4$.
3. Решите уравнение $\log_2(3x - 6) - \log_2 3 = \log_2 3$.
4. Решите уравнение $\log_{\frac{5}{4}}(5x + 1) = -1$.
5. Решите уравнение $\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{2}x + 3\right) = -1$.
6. Решите уравнение $\log_{0,3}(4x + 6) - \log_{0,3} \frac{1}{5} = \log_{0,3} 12$.
7. Решите уравнение $\log_7(8 - 2x) - \log_7 8 = \log_7 \frac{1}{40}$.
8. Решите уравнение $\log_3(x^2 - 4) = 2$. (Найдите ОДЗ, решите квадратное уравнение, проверьте.)

Тема 2.5. Тригонометрические уравнения (простейшие)

Теория

В задании №17 ЕГЭ базового уровня могут встретиться простейшие тригонометрические уравнения. На базовом уровне достаточно уметь решать уравнения вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, где a - табличное значение.

Основные значения тригонометрических функций для стандартных углов:

Угол, градусы	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1	0	1
tg	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0

Формулы для решения простейших тригонометрических уравнений:

- $\sin x = a: x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
- $\cos x = a: x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{tg} x = a: x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

На базовом уровне достаточно найти один корень на отрезке $[0; 2\pi]$ или в градусах $[0; ^\circ 360^\circ]$. В ЕГЭ базового уровня ответ обычно записывается в градусах для простейших случаев.

Важно: при решении уравнений вида $\sin x = a$ и $\cos x = a$ нужно помнить, что $|a| \leq 1$. Если $|a| > 1$, то корней нет.

Рассмотрим подробно несколько примеров.

Пример 1. $\sin x = \frac{1}{2}$.

- Решения: $x = 30^\circ + 360^\circ n$ или $x = 150^\circ + 360^\circ n, n \in \mathbb{Z}$.
- Если нужно указать корень на промежутке $[0; ^\circ 360^\circ]$, то это 30° и 150° .

Пример 2. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- Решения: $x = \pm 45^\circ + 360^\circ n, n \in \mathbb{Z}$.
- То есть $x = 45^\circ + 360^\circ n$ или $x = -45^\circ + 360^\circ n = 315^\circ + 360^\circ n$.
- На промежутке $[0; ^\circ 360^\circ]$: 45° и 315° .

Пример 3. $\operatorname{tg} x = 1$.

- Решения: $x = 45^\circ + 180^\circ n, n \in \mathbb{Z}$.
- На промежутке $[0; ^\circ 360^\circ]$: 45° и 225° .

Пример 4 (из варианта, задание №16). $26 \sin 750^\circ$.

- $750^\circ = 360^\circ \cdot 2 + 30^\circ$, значит $\sin 750^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.
- $26 \cdot \frac{1}{2} = 13$.
- Ответ: 13.

Пример 5. $2 \cos x - 1 = 0$.

- Выражаем $\cos x$: $\cos x = \frac{1}{2}$.
- $x = \pm 60^\circ + 360^\circ n, n \in \mathbb{Z}$.
- На промежутке $[0; ^\circ 360^\circ]$: 60° и 300° .

Пример 6. $\sin^2 x = \frac{1}{4}$.

- Извлекаем квадратный корень: $\sin x = \pm \frac{1}{2}$.
- $\sin x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 30^\circ + 360^\circ n$ или $x = 150^\circ + 360^\circ n$.
- $\sin x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = 210^\circ + 360^\circ n$ или $x = 330^\circ + 360^\circ n$.
- На промежутке $[0; 360^\circ]$: $30^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 330^\circ$.

Типичные ошибки:

- Забывают про периодичность тригонометрических функций.
- Не учитывают, что $\sin x = a$ имеет два корня на $[0; 360^\circ]$.
- Путают значения синуса и косинуса для стандартных углов.

Практические задания

1. Найдите значение выражения $26 \sin 750^\circ$.
2. Решите уравнение $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдите корни на промежутке $[0; 360^\circ]$.
3. Решите уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$. Найдите корни на промежутке $[0; 360^\circ]$.
4. Решите уравнение $\operatorname{tg} x = 1$. Найдите корни на промежутке $[0; 360^\circ]$.
5. Решите уравнение $\sin x = -\frac{1}{2}$. Найдите корни на промежутке $[0; 360^\circ]$.
6. Решите уравнение $2 \cos x - 1 = 0$.
7. Решите уравнение $\sin^2 x = \frac{1}{4}$. Найдите корни на промежутке $[0; 360^\circ]$.
8. Решите уравнение $\cos^2 x = \frac{3}{4}$. (Извлеките корень, затем решите два уравнения.)

Тема 2.6. Системы уравнений

Теория

В задании №17 ЕГЭ базового уровня могут встретиться системы уравнений. Основные методы решения:

1. Метод подстановки. Из одного уравнения выражают одну переменную через другую и подставляют во второе уравнение.
2. Метод сложения (алгебраического сложения). Уравнения складывают (или вычитают) почленно, чтобы исключить одну из переменных.
3. Графический метод. Строят графики обоих уравнений и находят точку их пересечения (на базовом уровне используется редко).

Важно: при решении систем нелинейных уравнений (содержащих x^2 , xy и т.д.) чаще используется метод подстановки.

Рассмотрим подробно несколько примеров.

Пример 1 (метод подстановки).

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$$

- Из первого уравнения: $y = 5 - x$.
- Подставляем во второе: $2x - (5 - x) = 7$.
- Раскрываем скобки: $2x - 5 + x = 7$.
- Приводим подобные: $3x - 5 = 7$.

- Решаем: $3x = 12, x = 4$.
- Находим y : $y = 5 - 4 = 1$.
- Ответ: $(4; 1)$.

Пример 2 (метод сложения).

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$$

- Складываем уравнения: $(x + y) + (2x - y) = 5 + 7$.
- Получаем: $3x = 12, x = 4$.
- Подставляем $x = 4$ в первое уравнение: $4 + y = 5, y = 1$.
- Ответ: $(4; 1)$.

Пример 3 (система нелинейных уравнений).

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

- Из второго уравнения: $y = 7 - x$.
- Подставляем в первое: $x^2 + (7 - x)^2 = 25$.
- Раскрываем скобки: $x^2 + 49 - 14x + x^2 = 25$.
- Приводим подобные: $2x^2 - 14x + 49 = 25$.
- Переносим: $2x^2 - 14x + 24 = 0$.
- Делим на 2: $x^2 - 7x + 12 = 0$.
- Решаем квадратное уравнение: $x_1 = 3, x_2 = 4$.
- Находим y : при $x = 3, y = 4$; при $x = 4, y = 3$.
- Ответ: $(3; 4)$ и $(4; 3)$.

Пример 4 (система с дробями).

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{4} \\ x - y = 2 \end{cases}$$

- Из второго: $x = y + 2$.
- Подставляем в первое: $\frac{1}{y+2} + \frac{1}{y} = \frac{3}{4}$.
- Приводим к общему знаменателю: $\frac{y+(y+2)}{y(y+2)} = \frac{3}{4}$.
- Получаем: $\frac{2y+2}{y(y+2)} = \frac{3}{4}$.
- Умножаем крест-накрест: $4(2y + 2) = 3y(y + 2)$.
- Раскрываем скобки: $8y + 8 = 3y^2 + 6y$.
- Переносим: $0 = 3y^2 - 2y - 8$.
- Решаем квадратное уравнение: $D = 4 + 96 = 100, y_1 = \frac{2+10}{6} = 2, y_2 = \frac{2-10}{6} = -\frac{4}{3}$.
- Находим x : при $y = 2, x = 4$; при $y = -\frac{4}{3}, x = -\frac{4}{3} + 2 = \frac{2}{3}$.
- Ответ: $(4; 2)$ и $(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3})$.

Типичные ошибки:

- Ошибки в знаках при переносе слагаемых.
- При решении систем нелинейных уравнений теряют часть корней.
- Не проверяют, удовлетворяют ли найденные решения исходным уравнениям (особенно для дробных уравнений).

Практические задания

1. Решите систему методом подстановки:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

2. Решите систему методом сложения:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 4x - 3y = 11 \end{cases}$$

3. Решите систему:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

4. Решите систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 9 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

5. Решите систему:

$$\begin{cases} xy = 12 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

6. Решите систему (выберите удобный метод):

$$\begin{cases} 4x + y = 10 \\ x - 2y = 7 \end{cases}$$

7. Решите систему:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$$

Тема 2.7. Линейные и квадратные неравенства

Теория

В задании №18 ЕГЭ базового уровня могут встретиться неравенства различных типов. Начнём с линейных и квадратных неравенств.

Линейные неравенства - неравенства вида $ax + b > 0$ ($\geq$, $<$, $\leq$). Решаются аналогично линейным уравнениям, но при умножении или делении на отрицательное число знак неравенства меняется на противоположный.

Пример 1. $2x - 7 > 3$.

- Переносим: $2x > 3 + 7$, $2x > 10$.
- Делим на 2 (положительное число, знак не меняется): $x > 5$.
- Ответ: $(5; +\infty)$.

Пример 2. $3 - 2x \geq 7$.

- Переносим: $-2x \geq 7 - 3$, $-2x \geq 4$.
- Делим на -2 (отрицательное число, знак меняется): $x \leq -2$.
- Ответ: $(-\infty; -2]$.

Квадратные неравенства - неравенства вида $ax^2 + bx + c > 0$ ($\geq$, $<$, $\leq$). Решаются методом интервалов:

1. Найти корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.
2. Отметить корни на числовой прямой (если неравенство строгое $>$ или $<$, корни выколотые; если нестрогое $\geq$ или $\leq$, корни включены).
3. Определить знаки на каждом промежутке (подстановкой пробной точки).
4. Выбрать промежутки, удовлетворяющие знаку неравенства.

Пример 3. $x^2 - 4x > 0$.

- $x(x - 4) > 0$.
- Корни: $x = 0$ и $x = 4$.
- Отмечаем на прямой: точки 0 и 4 (выколотые, так как неравенство строгое).
- Определяем знаки:
 - при $x < 0$: например, $x = -1$: $(-1)^2 - 4(-1) = 1 + 4 = 5 > 0 \rightarrow (+)$.
 - при $0 < x < 4$: например, $x = 1$: $1 - 4 = -3 < 0 \rightarrow (-)$.
 - при $x > 4$: например, $x = 5$: $25 - 20 = 5 > 0 \rightarrow (+)$.
- Неравенство > 0 , значит, нужны промежутки со знаком $(+)$.
- Ответ: $(-; 0) \cup (4; +\infty)$.

Пример 4. $x^2 - 5x + 6 < 0$.

- $(x - 2)(x - 3) < 0$.
- Корни: $x = 2$ и $x = 3$.
- Определяем знаки:
 - при $x < 2$: $x = 0$: $0 - 0 + 6 = 6 > 0 \rightarrow (+)$.
 - при $2 < x < 3$: $x = 2,5$: $6,25 - 12,5 + 6 = -0,25 < 0 \rightarrow (-)$.
 - при $x > 3$: $x = 4$: $16 - 20 + 6 = 2 > 0 \rightarrow (+)$.
- Неравенство < 0 , значит, нужен промежуток со знаком $(-)$.
- Ответ: $(2; 3)$.

Пример 5. $x^2 + 2x - 15 \geq 0$.

- $(x + 5)(x - 3) \geq 0$.
- Корни: $x = -5$ и $x = 3$.
- Знаки:
 - при $x < -5$: $(+)$
 - при $-5 < x < 3$: $(-)$
 - при $x > 3$: $(+)$
- Неравенство ≥ 0 , значит, промежутки со знаком $(+)$, включая корни.
- Ответ: $(-; \infty - 5] \cup [3; +\infty)$.

Типичные ошибки:

- Забывают поменять знак неравенства при делении на отрицательное число.
- Неправильно определяют знаки на промежутках.
- Путают, когда корни включаются, а когда выкалываются.

Практические задания

1. Решите линейное неравенство: $3x + 5 > 14$.

2. Решите линейное неравенство: $5 - 3x \geq 2$.
3. Решите линейное неравенство: $4x + 3 < 2x + 9$.
4. Решите квадратное неравенство: $x^2 - 9 > 0$.
5. Решите квадратное неравенство: $x^2 - 5x + 6 < 0$.
6. Решите квадратное неравенство: $x^2 + 2x - 15 \geq 0$.
7. Решите квадратное неравенство: $-x^2 + 4x - 3 > 0$. (Умножьте на -1, не забудьте поменять знак неравенства.)
8. Решите неравенство: $(x - 2)(x + 3) \leq 0$.

Тема 2.8. Рациональные неравенства

Теория

Рациональные неравенства - это неравенства, содержащие переменную в знаменателе. В задании №18 ЕГЭ базового уровня могут встретиться такие неравенства. Решаются методом интервалов с учётом ОДЗ.

Алгоритм:

1. Перенести все члены в левую часть, привести к общему знаменателю.
2. Найти нули числителя и знаменателя (точки, где знаменатель обращается в нуль, исключаются из ОДЗ).
3. Отметить все найденные точки на числовой прямой (точки знаменателя - выколотые всегда, точки числителя - в зависимости от знака неравенства: при $>$ или $<$ выколотые, при $\geq$ или $\leq$ включены).
4. Определить знаки на промежутках (подстановкой пробных точек).
5. Записать ответ.

Пример 1. $\frac{x-2}{x+1} > 0$.

- ОДЗ: $x \neq -1$.
- Нули числителя: $x = 2$.
- Точки: -1 (выколотая) и 2 (выколотая, так как неравенство строгое).
- Знаки:
 - при $x < -1$: например, $x = -2$: $\frac{-4}{-1} = 4 > 0 \rightarrow (+)$.
 - при $-1 < x < 2$: например, $x = 0$: $\frac{-2}{1} = -2 < 0 \rightarrow (-)$.
 - при $x > 2$: например, $x = 3$: $\frac{1}{4} > 0 \rightarrow (+)$.
- Неравенство > 0 , значит, промежутки со знаком (+).
- Ответ: $(-; -1) \cup (2; +\infty)$.

Пример 2. $\frac{x+3}{x-4} \leq 0$.

- ОДЗ: $x \neq 4$.
- Нули числителя: $x = -3$.
- Точки: -3 (включена, так как $\leq$) и 4 (выколотая).
- Знаки:
 - при $x < -3$: $\frac{-}{-} = (+)$.

- при $-3 < x < 4$: $\frac{+}{-} = (-)$.
- при $x > 4$: $\frac{+}{+} = (+)$.
- Неравенство ≤ 0 , значит, промежуток со знаком $(-)$, включая точку -3 .
- Ответ: $[-; 34)$.

Пример 3. $\frac{x^2-4}{x-1} \geq 0$.

- $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$.
- ОДЗ: $x \neq 1$.
- Нули числителя: $x = -2, x = 2$.
- Точки: -2 (включена), 2 (включена), 1 (выколота).
- Знаки:
 - при $x < -2$: $\frac{+}{-} = (-)$.
 - при $-2 < x < 1$: $\frac{-}{-} = (+)$.
 - при $1 < x < 2$: $\frac{-}{+} = (-)$.
 - при $x > 2$: $\frac{+}{+} = (+)$.
- Неравенство ≥ 0 , значит, промежутки со знаком $(+)$, включая корни числителя.
- Ответ: $[-; 21) \cup [2; +\infty)$.

Пример 4. $\frac{1}{(x-2)(x-3)} > 0$.

- ОДЗ: $x \neq 2, x \neq 3$.
- Знаменатель положителен, когда $(x - 2)(x - 3) > 0$.
- Нули знаменателя: $x = 2, x = 3$.
- Решаем $(x - 2)(x - 3) > 0$:
 - при $x < 2$: $(-)(-) = (+)$.
 - при $2 < x < 3$: $(+)(-) = (-)$.
 - при $x > 3$: $(+)(+) = (+)$.
- Так как вся дробь > 0 , а числитель равен $1 > 0$, то достаточно, чтобы знаменатель был > 0 .
- Ответ: $(-; \infty 2) \cup (3; +\infty)$.

Типичные ошибки:

- Забывают про ОДЗ и включают точки, где знаменатель равен нулю.
- Неправильно определяют знаки на промежутках.
- Путают, когда корни числителя включаются, а когда нет.

Практические задания

1. Решите неравенство: $\frac{x-2}{x+1} > 0$.
2. Решите неравенство: $\frac{x+3}{x-4} \leq 0$.
3. Решите неравенство: $\frac{x^2-4}{x-1} \geq 0$.
4. Решите неравенство: $\frac{x+2}{x^2-9} < 0$.

5. Решите неравенство: $\frac{x-1}{x^2+x-6} > 0$. (Разложите знаменатель на множители.)
6. Решите неравенство: $\frac{1}{(x-2)(x-3)} > 0$.
7. Решите неравенство: $\frac{2x-1}{x+2} \leq 1$. (Перенесите 1 влево, приведите к общему знаменателю.)

Тема 2.9. Показательные и логарифмические неравенства

Теория

В задании №18 ЕГЭ базового уровня могут встретиться показательные и логарифмические неравенства.

Показательные неравенства. Решаются с использованием монотонности показательной функции $y = a^x$:

- Если $a > 1$, то функция возрастает, знак неравенства сохраняется.
- Если $0 < a < 1$, то функция убывает, знак неравенства меняется на противоположный.

Пример 1. $2^{x-3} > 8$.

- $8 = 2^3$, значит $2^{x-3} > 2^3$.
- Основание $2 > 1$, знак сохраняется: $x - 3 > 3$.
- $x > 6$.
- Ответ: $(6; +\infty)$.

Пример 2. $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 4$.

- $4 = 2^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$, значит $\left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$.
- Основание $0 < \frac{1}{2} < 1$, знак меняется: $x > -2$.
- Ответ: $(-2; +\infty)$.

Пример 3. $2^{-x} < 0,25$.

- $0,25 = \frac{1}{4} = 2^{-2}$, значит $2^{-x} < 2^{-2}$.
- Основание $2 > 1$, знак сохраняется: $-x < -2$.
- Умножаем на -1, знак меняется: $x > 2$.
- Ответ: $(2; +\infty)$.

Логарифмические неравенства. Решаются с использованием монотонности логарифмической функции $y = \log_a x$:

- Если $a > 1$, то функция возрастает, знак неравенства сохраняется.
- Если $0 < a < 1$, то функция убывает, знак неравенства меняется на противоположный.
- Важно: ОДЗ: $x > 0$.

Пример 4. $\log_2 x > 3$.

- $3 = \log_2 8$, значит $\log_2 x > \log_2 8$.
- Основание $2 > 1$, знак сохраняется: $x > 8$.

- С учётом ОДЗ $x > 0$, ответ: $(8; +\infty)$.

Пример 5 . $\log_5 x > 1$.

- $1 = \log_5 5$, значит $\log_5 x > \log_5 5$.
- Основание $5 > 1$, знак сохраняется: $x > 5$.
- С учётом ОДЗ $x > 0$, ответ: $(5; +\infty)$.

Пример 6. $\log_{0,5} x < 2$.

- $2 = \log_{0,5} 0,25$, значит $\log_{0,5} x < \log_{0,5} 0,25$.
- Основание $0 < 0,5 < 1$, знак меняется: $x > 0,25$.
- С учётом ОДЗ $x > 0$, ответ: $(0,25; +\infty)$.

Пример 7 (сложнее). $\log_2(x - 1) < 3$.

- ОДЗ: $x - 1 > 0 \rightarrow x > 1$.
- $3 = \log_2 8$, значит $\log_2(x - 1) < \log_2 8$.
- Основание $2 > 1$, знак сохраняется: $x - 1 < 8$.
- $x < 9$.
- С учётом ОДЗ: $1 < x < 9$.
- Ответ: $(1; 9)$.

Типичные ошибки:

- Забывают про ОДЗ логарифма.
- Неправильно преобразуют число в логарифм с нужным основанием.
- Путают возрастание и убывание функции при основании меньше 1.

Практические задания

1. Решите неравенство: $2^{-x} < 0,25$.
2. Решите неравенство: $\log_5 x > 1$.
3. Решите неравенство: $3^{x-2} > 9$.
4. Решите неравенство: $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 27$.
5. Решите неравенство: $\log_3 x < 2$.
6. Решите неравенство: $\log_{\frac{1}{2}} x \geq 3$.
7. Решите неравенство: $\log_2(x - 1) < 3$. (Найдите ОДЗ и решите.)
8. Решите неравенство: $\log_{0,3} x > 1$. (Основание меньше 1, знак меняется.)

Тема 2.10. Планиметрия: треугольники, четырёхугольники, площади

Теория

В заданиях №9 и №12 ЕГЭ базового уровня проверяются навыки решения планиметрических задач. Основные фигуры и формулы:

Треугольники:

- Площадь треугольника: $S = \frac{1}{2}ah$, где a - сторона, h - высота, проведённая к этой стороне.
- Площадь прямоугольного треугольника: $S = \frac{1}{2}ab$, где a и b - катеты.

- Теорема Пифагора: $c^2 = a^2 + b^2$ для прямоугольного треугольника (где c - гипотенуза).
- В равнобедренном треугольнике: углы при основании равны, медиана, проведённая к основанию, является также высотой и биссектрисой.
- Средняя линия треугольника: отрезок, соединяющий середины двух сторон, параллелен третьей стороне и равен её половине.

Четырёхугольники:

- Прямоугольник: $S = ab$, $P = 2(a + b)$.
- Квадрат: $S = a^2$, $P = 4a$.
- Параллелограмм: $S = ah$, где a - сторона, h - высота.
- Трапеция: $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$, где a и b - основания, h - высота.

Задачи на клетчатой бумаге (задание №9): площадь фигуры на клетчатой бумаге можно найти:

1. По формуле, если фигура стандартная (прямоугольник, треугольник и т.д.).
2. Методом дополнения (достроить до прямоугольника и вычесть лишние части).
3. Методом разбиения (разбить на простые фигуры и сложить их площади).

Пример 1. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC = 15$, $AC = 18$. Найдите длину медианы BM.

- Так как $AB = BC$, треугольник равнобедренный с основанием AC.
- Медиана BM, проведённая к основанию, является также высотой.
- Тогда $AM = MC = \frac{AC}{2} = \frac{18}{2} = 9$.
- Рассмотрим прямоугольный треугольник ABM: $AB = 15$, $AM = 9$.
- По теореме Пифагора: $AB^2 = AM^2 + BM^2$.
- $15^2 = 9^2 + BM^2$, $225 = 81 + BM^2$, $BM^2 = 144$, $BM = 12$.
- Ответ: 12.

Пример 2. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна $2\sqrt{5}$, а один из катетов равен 2.

- По теореме Пифагора: $(2\sqrt{5})^2 = 2^2 + b^2$.
- $20 = 4 + b^2$, $b^2 = 16$, $b = 4$.
- Площадь: $S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$.
- Ответ: 4.

Пример 3. В равнобедренном треугольнике ABC медиана BK = 10, боковая сторона BC = 26. Найдите длину отрезка MN, если известно, что он соединяет середины боковых сторон.

- Так как MN соединяет середины боковых сторон, то MN - средняя линия треугольника ABC, параллельная основанию AC.
- Средняя линия равна половине основания: $MN = \frac{AC}{2}$.
- Найдём AC. В равнобедренном треугольнике медиана BK к основанию является высотой. Значит, треугольник BKC - прямоугольный (K - середина AC).

- $BC = 26, BK = 10$. По теореме Пифагора: $BC^2 = BK^2 + KC^2$.
- $26^2 = 10^2 + KC^2, 676 = 100 + KC^2, KC^2 = 576, KC = 24$.
- $AC = 2 \cdot KC = 48$.
- Тогда $MN = \frac{48}{2} = 24$.
- Ответ: 24.

Пример 4. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$.

- Используем метод дополнения: достраиваем фигуру до прямоугольника, считаем площадь прямоугольника, вычитаем площади лишних частей.
- Или разбиваем фигуру на треугольники и прямоугольники, считаем их площади и складываем.

Практические задания

1. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC = 15, AC = 18$. Найдите длину медианы BM.
2. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна $2\sqrt{5}$, а один из катетов равен 2.
3. В равнобедренном треугольнике ABC медиана BK = 10, боковая сторона BC = 26. Найдите длину отрезка MN, если известно, что он соединяет середины боковых сторон.
4. Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$.
5. Площадь прямоугольного треугольника равна 24, один из катетов равен 6. Найдите второй катет.
6. В треугольнике ABC угол $C = 90^\circ, AB = 13, AC = 5$. Найдите BC.
7. Найдите площадь параллелограмма, если его сторона равна 8, а высота, проведённая к этой стороне, равна 5.

Тема 2.11. Планиметрия: окружность и прикладные задачи

Теория

В заданиях №10 и №12 ЕГЭ базового уровня могут встретиться задачи на окружность и прикладные геометрические задачи.

Окружность:

- Длина окружности: $C = 2\pi R$.
- Площадь круга: $S = \pi R^2$.
- Центральный угол равен дуге, на которую он опирается.
- Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается.
- Теорема о вписанном угле, опирающемся на диаметр: он равен 90° .
- Сумма углов в треугольнике равна 180° .

Прикладные задачи (задание №10):

- Задачи на нахождение площади, периметра, длины забора, угла и т.д.
- Часто используются свойства прямоугольника, квадрата, окружности.

Пример 1 . Колесо имеет 24 спицы. Углы между любыми двумя соседними спицами равны. Найдите величину угла (в градусах), который образуют две соседние спицы.

- Полный угол = 360° .
- Количество спиц = 24.
- Угол между соседними спицами: $360^\circ : 24 = 15^\circ$.
- Ответ: 15° .

Пример 2 . Дачный участок имеет форму прямоугольника, стороны которого равны 50 м и 30 м. Дом, расположенный на участке, на плане также имеет форму прямоугольника, стороны которого равны 8 м и 10 м. Найдите площадь оставшейся части участка, не занятой домом.

- Площадь участка: $50 \cdot 30 = 1500 \text{ м}^2$.
- Площадь дома: $8 \cdot 10 = 80 \text{ м}^2$.
- Оставшаяся часть: $1500 - 80 = 1420 \text{ м}^2$.
- Ответ: 1420.

Пример 3 . Участок земли имеет прямоугольную форму. Стороны прямоугольника равны 40 м и 50 м. Найдите длину забора (в метрах), которым нужно огородить участок, предусмотрев проезд шириной 3 м.

- Периметр участка: $P = 2(40 + 50) = 2 \cdot 90 = 180 \text{ м}$.
- Вычитаем проезд: $180 - 3 = 177 \text{ м}$.
- Ответ: 177.

Пример 4 . На окружности радиуса 3 взята точка С. Отрезок АВ - диаметр окружности, $AC = 2\sqrt{5}$. Найдите ВС.

- Так как АВ - диаметр, то угол $ACB = 90^\circ$ (вписанный угол, опирающийся на диаметр).
- Значит, треугольник АВС - прямоугольный.
- Гипотенуза $AB = 2R = 6$.
- По теореме Пифагора: $AB^2 = AC^2 + BC^2$.
- $36 = (2\sqrt{5})^2 + BC^2 = 20 + BC^2$.
- $BC^2 = 16, BC = 4$.
- Ответ: 4.

Пример 5. Центральный угол окружности равен 60° . Найдите вписанный угол, опирающийся на ту же дугу.

- Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.
- $\frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.
- Ответ: 30° .

Практические задания

1. Колесо имеет 24 спицы. Найдите величину угла (в градусах), который образуют две соседние спицы.

2. Дачный участок имеет форму прямоугольника, стороны которого равны 50 м и 30 м. Дом имеет форму прямоугольника со сторонами 8 м и 10 м. Найдите площадь оставшейся части участка.
3. Участок земли имеет прямоугольную форму. Стороны прямоугольника равны 40 м и 50 м. Найдите длину забора (в метрах), которым нужно огородить участок, предусмотрев проезд шириной 3 м.
4. На окружности радиуса 3 взята точка С. Отрезок АВ - диаметр окружности, $АС = 2\sqrt{5}$. Найдите ВС.
5. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге (квадратная решётка).
6. Центральный угол окружности равен 60° . Найдите вписанный угол, опирающийся на ту же дугу.
7. Радиус окружности равен 5. Найдите длину окружности и площадь круга. (π округлите до 3,14.)

Тема 2.12. Стереометрия: объёмы и площади поверхностей

Теория

В заданиях №11 и №13 ЕГЭ базового уровня проверяются навыки решения стереометрических задач. Основные тела и формулы:

Прямоугольный параллелепипед (включая куб):

- Объём: $V = abc$ (для куба $V = a^3$).
- Площадь полной поверхности: $S = 2(ab + bc + ac)$ (для куба $S = 6a^2$).

Цилиндр:

- Объём: $V = \pi R^2 h$.
- Площадь боковой поверхности: $S_{\text{бок}} = 2\pi R h$.
- Площадь полной поверхности: $S_{\text{полн}} = 2\pi R(R + h)$.

Конус:

- Объём: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$.
- Площадь боковой поверхности: $S_{\text{бок}} = \pi R l$, где l - образующая.
- Площадь полной поверхности: $S_{\text{полн}} = \pi R(R + l)$.

Шар:

- Объём: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.
- Площадь поверхности: $S = 4\pi R^2$.

Пирамида (правильная треугольная):

- Объём: $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}h$.
- Площадь боковой поверхности: $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}P_{\text{осн}} \cdot l$, где l - апофема (высота боковой грани).

Призма (правильная треугольная):

- Объём: $V = S_{\text{осн}} \cdot h$.

- Площадь боковой поверхности: $S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} \cdot h$.

Важно: в задачах на вычисление объёма при погружении детали в жидкость используется принцип: объём детали равен объёму вытесненной жидкости.

Пример 1 . В бак, имеющий форму правильной четырёхугольной призмы со стороной основания 70 см, налита жидкость. Чтобы измерить объём детали сложной формы, её полностью погружают в эту жидкость. Найдите объём детали, если после её погружения уровень жидкости в баке поднялся на 5 см.

- Объём детали равен объёму вытесненной жидкости.
- Бак - правильная четырёхугольная призма, значит, в основании квадрат.
- Площадь основания: $S = 70 \cdot 70 = 4900 \text{ см}^2$.
- Высота подъёма: $h = 5 \text{ см}$.
- Объём: $V = S \cdot h = 4900 \cdot 5 = 24500 \text{ см}^3$.
- Ответ: 24500.

Пример 2 . От деревянной правильной треугольной призмы отпилили все её вершины (см. рис.). Сколько вершин у получившегося многогранника?

- У правильной треугольной призмы 6 вершин (по 3 на каждом основании).
- При отпиливании каждой вершины образуется новая грань (треугольник) и три новых вершины на рёбрах, но рёбер становится больше.
- У призмы было 6 вершин. После отпиливания всех вершин каждая вершина заменяется на три новых (на рёбрах), но соседние вершины дают общие точки.
- В результате получается многогранник, у которого $2 \cdot 3 = 6$ треугольных граней (от спилов) и 3 боковые грани. Вершин: на каждом ребре появляется по одной вершине, рёбер у призмы 9, значит, вершин = $9 \cdot 2 = 18$? Нет, нужно считать аккуратно.
- При отпиливании одной вершины треугольной призмы мы получаем 3 новых вершины на рёбрах, выходящих из этой вершины. При отпиливании всех вершин, на каждом ребре появляется по две вершины (от двух спилов), но они совпадают в середине ребра. В итоге на каждом ребре получается одна вершина. Рёбер у треугольной призмы 9. Значит, вершин = 9.
- Но это упрощённое рассуждение. На самом деле для правильной треугольной призмы после отпиливания всех вершин получается многогранник с 9 вершинами (по одной на каждом ребре исходной призмы) и $6+3=9$ гранями.
- Ответ: 9.

Пример 3. Даны два цилиндра. Радиус основания и высота первого цилиндра равны соответственно 9 и 8, а второго - 12 и 3. Во сколько раз площадь боковой поверхности первого цилиндра больше площади боковой поверхности второго?

- Площадь боковой поверхности цилиндра: $S_{\text{бок}} = 2\pi R h$.
- Для первого: $S_1 = 2\pi \cdot 9 \cdot 8 = 144\pi$.
- Для второго: $S_2 = 2\pi \cdot 12 \cdot 3 = 72\pi$.
- Отношение: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{144\pi}{72\pi} = 2$.

- Ответ: 2.

Пример 4. Даны два шара с радиусами 8 и 4. Во сколько раз объём большего шара больше объёма меньшего?

- Объём шара: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.
- Для большего: $V_1 = \frac{4}{3}\pi \cdot 8^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 512$.
- Для меньшего: $V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot 4^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 64$.
- Отношение: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{512}{64} = 8$.
- Ответ: 8.

Пример 5. Даны две коробки, имеющие форму правильной четырёхугольной призмы, стоящей на основании. Первая коробка в четыре раза ниже второй, а вторая в полтора раза шире первой. Во сколько раз объём второй коробки больше объёма первой?

- Пусть у первой коробки сторона основания a , высота h . Объём: $V_1 = a^2 h$.
- Вторая коробка: ширина (сторона основания) в 1,5 раза больше, т.е. $1,5a$. Высота в 4 раза больше (так как первая в 4 раза ниже второй), т.е. $4h$.
- Объём второй: $V_2 = (1,5a)^2 \cdot 4h = 2,25a^2 \cdot 4h = 9a^2 h$.
- Отношение: $\frac{V_2}{V_1} = \frac{9a^2 h}{a^2 h} = 9$.
- Ответ: 9.

Типичные ошибки:

- Путают формулы объёма и площади поверхности.
- Неправильно применяют коэффициент подобия (для объёма - куб коэффициента, для площади - квадрат).
- В задачах с погружением детали в жидкость забывают, что объём детали равен объёму вытесненной жидкости.

Практические задания

1. В бак, имеющий форму правильной четырёхугольной призмы со стороной основания 70 см, налита жидкость. Чтобы измерить объём детали сложной формы, её полностью погружают в эту жидкость. Найдите объём детали, если после её погружения уровень жидкости в баке поднялся на 5 см.
2. От деревянной правильной треугольной призмы отпилили все её вершины. Сколько вершин у получившегося многогранника?
3. Даны два цилиндра. Радиус основания и высота первого цилиндра равны соответственно 9 и 8, а второго - 12 и 3. Во сколько раз площадь боковой поверхности первого цилиндра больше площади боковой поверхности второго?
4. Даны два шара с радиусами 8 и 4. Во сколько раз объём большего шара больше объёма меньшего?
5. Даны две коробки, имеющие форму правильной четырёхугольной призмы, стоящей на основании. Первая коробка в четыре раза ниже второй, а вторая в полтора раза шире первой. Во сколько раз объём второй коробки больше объёма первой?

6. Через точку, делящую высоту конуса в отношении 1 : 2, считая от вершины, проведена плоскость, параллельная основанию. Найдите объём этого конуса, если объём конуса, отсекаемого от данного конуса проведённой плоскостью, равен 10. (Используйте коэффициент подобия: объёмы относятся как куб коэффициента подобия.)
7. Стороны основания правильной треугольной пирамиды равны 16. А боковые рёбра равны 17. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

5. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА МОДУЛЯ 3

ГРАФИКИ, ДИАГРАММЫ, ТАБЛИЦЫ И ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Цель модуля:

Сформировать у обучающихся навыки работы с информацией, представленной в виде графиков, таблиц и диаграмм, навыки решения задач по теории вероятностей, а также навыки выполнения преобразований со степенями и решения нестандартных логических задач, соответствующих заданиям № 3, 5, 6, 7, 16, 19, 21 ЕГЭ по математике базового уровня.

Задачи модуля

1. Сформировать навыки извлечения и анализа информации из таблиц, столбчатых и круговых диаграмм, графиков зависимостей.
2. Отработать умение читать графики функций: определять значения функции, промежутки возрастания/убывания, сопоставлять график с характеристиками.
3. Сформировать навыки решения задач на классическое определение вероятности.
4. Обучить правилам сложения и умножения вероятностей для несовместных и независимых событий.
5. Отработать применение формулы вероятности противоположного события.
6. Сформировать навыки преобразования выражений со степенями с рациональными показателями и с корнями.
7. Научить решать нестандартные логические и числовые задачи (задание 21) методом перебора, составления уравнений, использования признаков делимости.
8. Воспитывать внимание, аккуратность и логическое мышление при работе с графической и текстовой информацией.

Планируемые результаты освоения модуля 3

Обучающийся будет знать:

- способы представления информации в таблицах, столбчатых и круговых диаграммах, на графиках;
- классическое определение вероятности: $P(A) = m/n$;
- правила сложения и умножения вероятностей для несовместных и независимых событий;
- формулу вероятности противоположного события;
- свойства степеней с рациональными показателями и арифметических корней;

- признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 22, 25, 125.

Обучающийся будет уметь:

- извлекать информацию из таблиц, диаграмм и графиков, представленных в заданиях ЕГЭ;
- определять значения величин по графикам и диаграммам;
- сравнивать данные, представленные в таблицах и диаграммах;
- вычислять вероятности событий в простейших случаях с использованием классического определения вероятности;
- применять правила сложения и умножения вероятностей при решении задач;
- решать комбинированные задачи на применение теории вероятностей;
- выполнять преобразования выражений со степенями и корнями;
- решать нестандартные задачи на подбор чисел, используя признаки делимости и логические рассуждения.

Учебный план модуля 3

Наименование тем		Всего	В том числе		Формы контроля и аттестации
			теория	практика	
Учебный кабинет	Тема 3.1. Чтение таблиц	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 3.2. Чтение столбчатых и круговых диаграмм	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 3.3. Чтение графиков зависимостей	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 3.4. Анализ графиков функций (сопоставление с характеристиками)	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 3.5. Классическое определение вероятности	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 3.6. Правило сложения вероятностей (несовместные события)	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 3.7. Правило умножения вероятностей (независимые события)	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 3.8. Вероятность противоположного события и	2	1	1	Текущий контроль

	комбинированные задачи				
Учебный кабинет	Тема 3.9. Степени с рациональными показателями	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 3.10. Преобразования выражений со степенями и корнями (включая простейшую тригонометрию)	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Тема 3.11. Задачи на смекалку (числовые и логические)	2	1	1	Текущий контроль
Учебный кабинет	Промежуточная аттестация по модулю 3	2	-	2	Промежуточная аттестация
	Итого:	24	11	13	

Календарный учебный график модуля 3

Наименование тем		Всего	В том числе		Учебная неделя, день недели
			теория	практика	
Учебный кабинет	Тема 3.1. Чтение таблиц	2	1	1	9-я неделя, среда
Учебный кабинет	Тема 3.2. Чтение столбчатых и круговых диаграмм	2	1	1	9-я неделя, пятница
Учебный кабинет	Тема 3.3. Чтение графиков зависимостей	2	1	1	10-я неделя, понедельник
Учебный кабинет	Тема 3.4. Анализ графиков функций (сопоставление с характеристиками)	2	1	1	10-я неделя, среда
Учебный кабинет	Тема 3.5. Классическое определение вероятности	2	1	1	10-я неделя, пятница
Учебный кабинет	Тема 3.6. Правило сложения вероятностей (несовместные события)	2	1	1	11-я неделя, понедельник
Учебный кабинет	Тема 3.7. Правило умножения вероятностей (независимые события)	2	1	1	11-я неделя, среда

Учебный кабинет	Тема 3.8. Вероятность противоположного события и комбинированные задачи	2	1	1	11-я неделя, пятница
Учебный кабинет	Тема 3.9. Степени с рациональными показателями	2	1	1	12-я неделя, понедельник
Учебный кабинет	Тема 3.10. Преобразования выражений со степенями и корнями (включая простейшую тригонометрию)	2	1	1	12-я неделя, среда
Учебный кабинет	Тема 3.11. Задачи на смекалку (числовые и логические)	2	1	1	12-я неделя, пятница
Учебный кабинет	Промежуточная аттестация по модулю 3	2	-	2	13-я неделя, понедельник
Итого:		24	11	13	

Содержание модуля 3

Тема 3.1. Чтение графиков, таблиц, диаграмм

Теория

Задания №3 и №8 ЕГЭ по математике базового уровня проверяют умение извлекать информацию из таблиц, диаграмм и графиков. Это задания, где не требуется сложных вычислений - нужно внимательно прочитать представленные данные и правильно ответить на вопрос.

Правила работы с таблицами:

- Внимательно изучить заголовки строк и столбцов.
- Определить, в каких единицах измерены данные.
- Найти нужное пересечение строки и столбца.
- Проверить, правильно ли выполнено считывание.

Типичные задачи:

- Определить значение величины в заданный момент времени.
- Сравнить два значения (больше/меньше/равно).
- Найти разность между значениями.
- Определить процентное соотношение.
- Найти среднее значение.

Таблица 1. Виды представления информации

Вид	Описание	Что нужно уметь
Таблица	Данные упорядочены в строки и столбцы	Находить значение на пересечении строки и столбца
Круговая диаграмма	Целое разделено на части	Определять процентное соотношение
Столбчатая диаграмма	Значения представлены столбцами	Сравнивать значения по высоте столбцов
График	Зависимость одной величины от другой	Определять значение в заданной точке

Практические задания

1. В таблице представлены данные о стоимости некоторой модели смартфона в различных магазинах.

Магазин	Стоимость смартфона (руб.)
«ОК-Техника»	13 200
«Скоростной»	12 300
«Магия связи»	12 372
«Про-фон»	13 190
«Смартфон и Ко»	13 099
«Прогресс-Э»	12 105
«999 телефонов»	12 230
«Макропоиск»	13 130
«Вселенная телефонов»	12 290

Найдите наименьшую стоимость смартфона среди представленных предложений. Ответ дайте в рублях.

2. В таблице показано расписание пригородных электропоездов по направлению Москва Октябрьская - Клин - Тверь. Владислав пришёл на станцию Москва Октябрьская в 18:20 и хочет уехать в Тверь на электропоезде без пересадок. Найдите номер ближайшего электропоезда, который ему подходит.

Номер электропоезда	Москва Октябрьская	Клин	Тверь
1	17:31	19:04	-
2	17:46	19:08	19:55

3	18:10	19:28	20:15
4	18:15	19:37	21:11
5	18:21	19:50	-
6	19:14	20:55	-
7	19:21	21:10	22:11

Тема 3.2. Чтение столбчатых и круговых диаграмм

Теория

Столбчатая диаграмма: значения величин представлены столбцами. Высота столбца соответствует значению. По диаграмме можно сравнивать значения, находить максимум/минимум, определять, во сколько раз одно значение больше другого.

Круговая диаграмма: целое (100%) разделено на секторы, каждый сектор соответствует доле части. Позволяет оценить процентное соотношение.

Правила чтения:

- Обратить внимание на шкалу (цену деления).
- Для столбчатой диаграммы - точно считывать значение по вертикальной оси.
- Для круговой - если даны проценты, можно вычислить абсолютные величины, зная общее количество.

Пример из варианта (задание №3 - среднемесячная температура в Симферополе): По горизонтали - месяцы, по вертикали - температура в °С. Нужно найти наибольшую среднемесячную температуру.

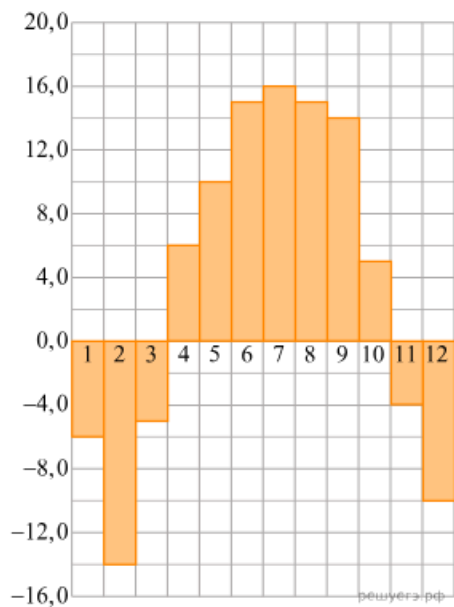
Алгоритм:

- Найти самый высокий столбик (или точку на линии, если график).
- Считать значение по вертикальной оси.
- Записать ответ (число).

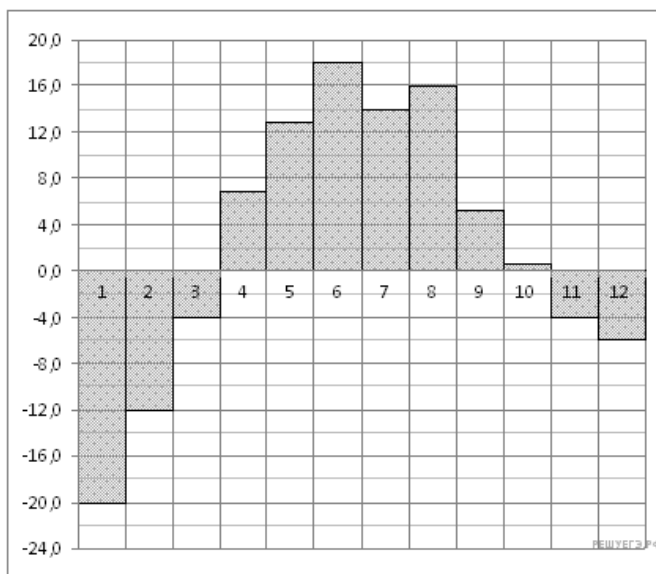
Пример с эстафетами (задание №3 - таблица баллов команд по эстафетам): Дана таблица с баллами для трёх эстафет. Нужно сложить баллы каждой команды и определить, какое место заняла команда «Чемпионы».

Практические задания

1. На диаграмме показана среднемесячная температура в Нижнем Новгороде (Горьком) за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали - температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наименьшую среднемесячную температуру в 1994 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Екатеринбурге (Свердловске) за каждый месяц 1973 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали - температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разность между наибольшей и наименьшей среднемесячными температурами в 1973 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Тема 3.3. Чтение графиков зависимостей

Теория

График зависимости показывает изменение одной величины в зависимости от другой (например, температуры от времени, давления от высоты). По графику можно определить значение величины в заданной точке, сравнить значения, найти промежутки возрастания/убывания.

Правила:

- Определить, что отложено по осям (названия и единицы измерения).
- Найти нужную точку на оси x , подняться до пересечения с графиком, затем по вертикали считать значение.

- Для нахождения промежутков - смотреть, где график идёт вверх, вниз или горизонтально.

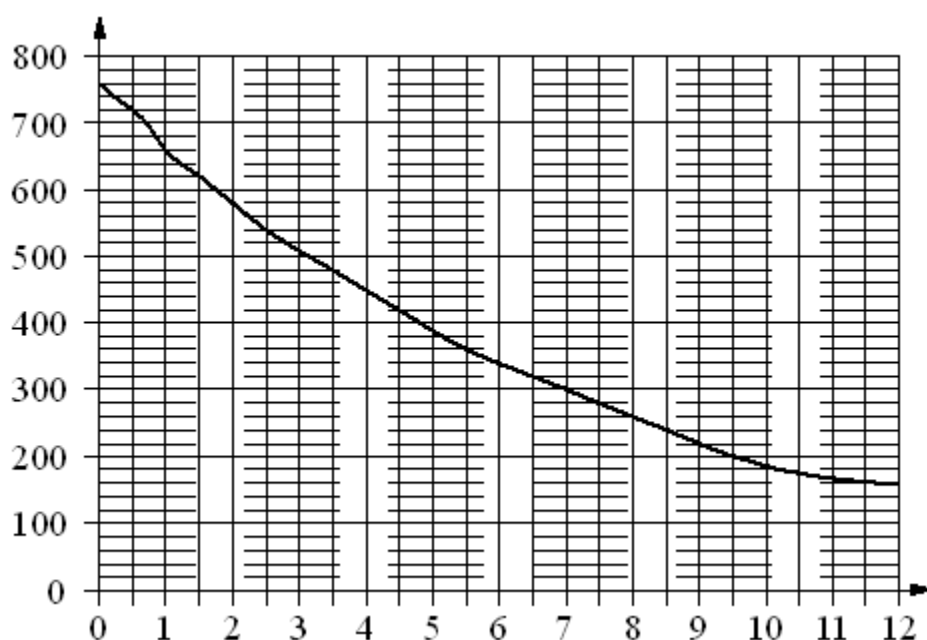
Пример из варианта (задание №7 - крутящий момент двигателя): По графику зависимости крутящего момента от числа оборотов в минуту нужно сопоставить интервалы оборотов с характеристиками (не меняется, уменьшается, самый быстрый рост).

Алгоритм:

- Рассмотреть каждый интервал.
- Посмотреть, как ведёт себя график: горизонтально (не меняется), вниз (убывает), круто вверх (быстрый рост).
- Выбрать соответствующую характеристику.

Практические задания

1. На графике изображена зависимость атмосферного давления от высоты над уровнем моря. На горизонтальной оси отмечена высота над уровнем моря в километрах, на вертикальной - давление в миллиметрах ртутного столба. Определите по графику, на какой высоте атмосферное давление равно 540 миллиметрам ртутного столба. Ответ дайте в километрах.



2. На рисунке показано изменение атмосферного давления в течение трёх суток. По горизонтали указаны дни недели, по вертикали - значения атмосферного давления в миллиметрах ртутного столба. Определите по рисунку наибольшее значение атмосферного давления (мм рт. ст.) в четверг.



Тема 3.4. Анализ графиков функций (сопоставление с характеристиками)

Теория

В задании №7 ЕГЭ базового уровня часто даётся график функции и требуется сопоставить точки на графике со значениями производной в этих точках (или с характеристиками поведения функции). На базовом уровне не требуется вычислять производную аналитически, достаточно визуально определить знак и величину наклона касательной.

Основные правила:

- Производная в точке равна тангенсу угла наклона касательной к графику в этой точке.
- Если касательная идёт вверх (угол острый), производная положительна.
- Если касательная идёт вниз (угол тупой), производная отрицательна.
- Чем круче наклон, тем больше модуль производной.
- Если касательная горизонтальна, производная равна 0.

Пример из варианта (задание №7 - точки K, L, M, N на графике и значения производной):

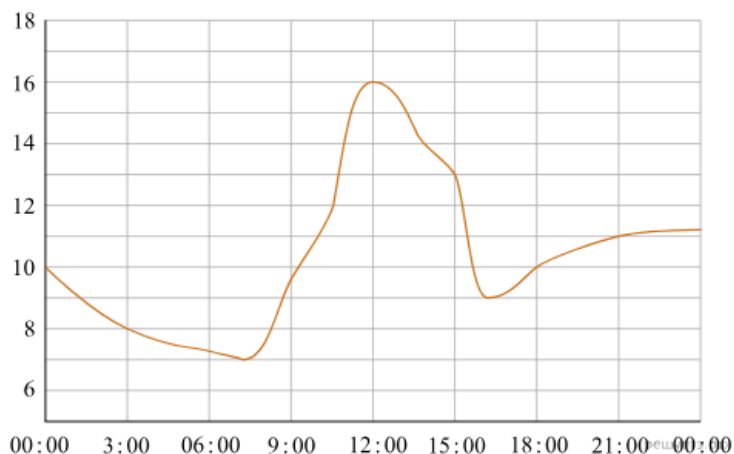
Нужно для каждой точки выбрать значение производной из списка (-4, 3, 2, -0,5). Сопоставляем крутизну и знак наклона.

Алгоритм:

- Определить знак производной: если функция возрастает (касательная идёт вверх) - производная положительна; убывает - отрицательна.
- Оценить крутизну: чем круче, тем больше модуль.
- Сопоставить с данными значениями.

Практические задания

1. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении суток. По горизонтали указывается время суток, по вертикали - значение температуры в градусах Цельсия.



Пользуясь диаграммой, установите связь между промежутками времени и характером изменения температуры.

ПРОМЕЖУТКИ ВРЕМЕНИ

А) 00:00–06:00

Б) 09:00–12:00

В) 12:00–15:00

Г) 18:00–00:00

ХАРАКТЕР ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ

1) температура снижалась быстрее всего

2) температура снижалась медленнее всего

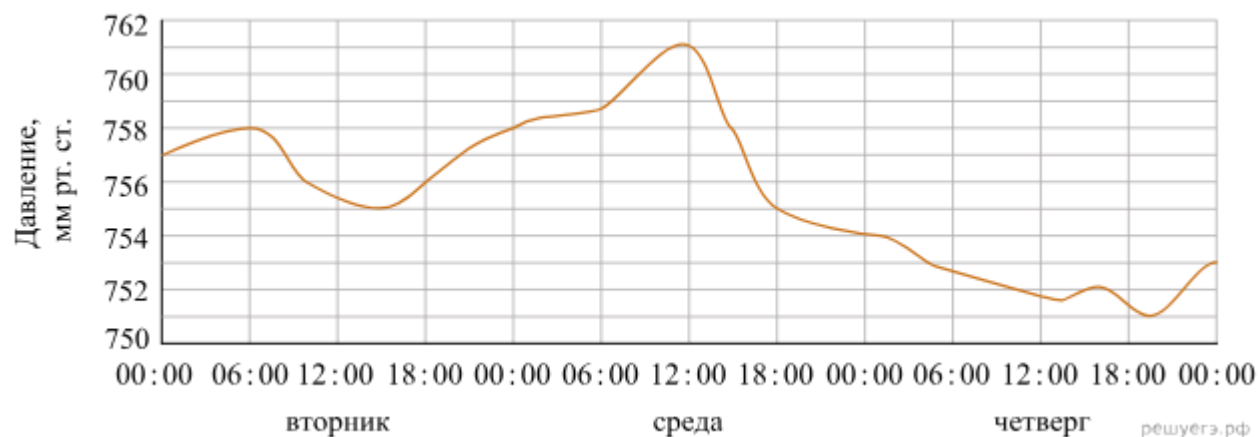
3) температура росла быстрее всего

4) температура росла медленнее всего

Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

А	Б	В	Г

2. На рисунке изображён график изменения атмосферного давления в городе Энске за три дня. По горизонтали указаны дни недели и время, по вертикали - значения атмосферного давления в миллиметрах ртутного столба.



Пользуясь диаграммой, установите связь между промежутками времени и характером изменения давления.

ПРОМЕЖУТКИ ВРЕМЕНИ

- А) 06:00–18:00 вторника
- Б) 00:00–18:00 среды
- В) 12:00–18:00 среды
- Г) 18:00–00:00 среды

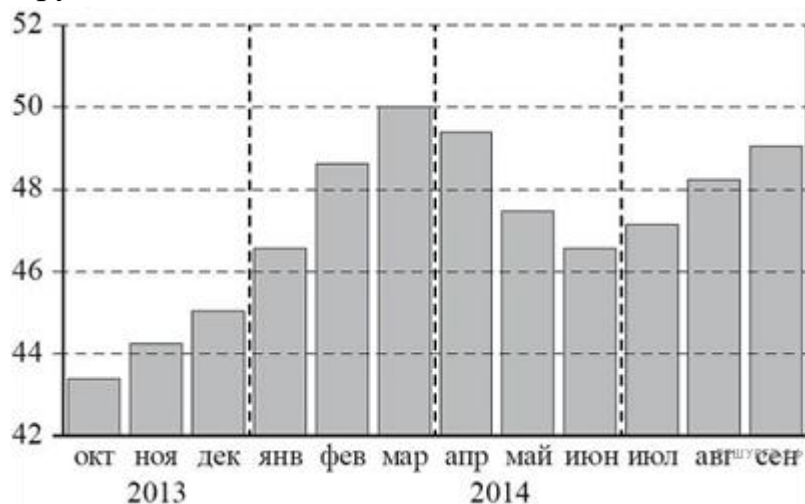
ХАРАКТЕР ИЗМЕНЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ

- 1) Давление сначала увеличивалось, затем уменьшалось
- 2) Давление сначала уменьшалось, затем увеличивалось
- 3) Давление уменьшалось медленнее всего
- 4) Давление уменьшалось быстрее всего

Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

А	Б	В	Г

3. На диаграмме изображён среднемесячный курс евро в период с октября 2013 года по сентябрь 2014 года. По горизонтали указываются месяц и год, по вертикали - курс евро в рублях.



ПЕРИОДЫ ВРЕМЕНИ

- А) октябрь–декабрь 2013г.
- Б) январь–март 2014г.
- В) апрель–июнь 2014г.
- Г) июль–сентябрь 2014г.

ХАРАКТЕРИСТИКИ КУРСА ЕВРО

- 1) содержит месяц с наибольшим курсом евро за период с октября 2013 года по сентябрь 2014 года
- 2) содержит месяц с наименьшим курсом евро за период с октября 2013 года по сентябрь 2014 года
- 3) среднемесячный курс евро падал все месяцы периода
- 4) в последний месяц периода средний курс евро был больше 48 рублей и меньше 50 рублей за 1 евро

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

А	Б	В	Г

Тема 3.5. Классическое определение вероятности

Теория

Теория вероятностей проверяется в задании №19 ЕГЭ базового уровня. Классическое определение вероятности: вероятность события A равна отношению числа благоприятных исходов m к общему числу равновозможных исходов n :

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Важно:

- Вероятность всегда находится в пределах от 0 до 1 (включительно).
- Все исходы должны быть равновозможными (например, при бросании кубика выпадение каждой грани равновероятно).
- Вероятность может быть выражена десятичной дробью, обыкновенной дробью или процентами.

Пример:

В фирме такси 15 автомобилей: 9 чёрных с жёлтыми надписями, остальные - жёлтые с чёрными надписями. Найдите вероятность, что на вызов приедет жёлтая машина с чёрными надписями.

- Общее число: 15.
- Жёлтых с чёрными: $15 - 9 = 6$.
- Вероятность: $6/15 = 0,4$.

Практические задания

1. На семинар приехали 6 учёных из Норвегии, 5 из России и 9 из Испании. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что восьмым окажется доклад учёного из России.
2. В фирме такси в наличии 19 легковых автомобилей: 5 из них чёрного цвета с жёлтыми надписями, остальные - жёлтого цвета с чёрными надписями. Найдите вероятность того, что на случайный вызов приедет машина жёлтого цвета с чёрными надписями.
3. На чемпионате по прыжкам в воду выступают 25 спортсменов, среди них 8 прыгунов из России и 9 прыгунов из Парагвая. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что шестым будет выступать прыгун из Парагвая.
4. В корзине 10 красных, 8 синих и 6 зелёных шаров. Какова вероятность вытащить красный шар?
5. На тарелке 12 пирожков: с мясом - 5, с капустой - 4, с яблоками - 3. Какова вероятность, что случайно выбранный пирожок окажется с яблоками?
6. Монета брошена один раз. Найдите вероятность выпадения орла.

7. Игральный кубик брошен один раз. Найдите вероятность выпадения числа, большего 4.

Тема 3.6. Правило сложения вероятностей

Теория

Если события несовместны (не могут произойти одновременно), то вероятность наступления одного из них равна сумме вероятностей каждого:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Пример: При бросании кубика найти вероятность выпадения числа 1 или числа 6.

- $P(1) = 1/6$, $P(6) = 1/6$, события несовместны.
- $P(1 \text{ или } 6) = 1/6 + 1/6 = 2/6 = 1/3$.

Важно: если события совместны (могут произойти одновременно), то формула сложения усложняется: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, но на базовом уровне обычно дают несовместные события.

Практические задания

1. В урне 4 белых, 5 чёрных и 3 красных шара. Какова вероятность вынуть белый или красный шар?
2. На экзамене 20 билетов, из них 5 по геометрии, 7 по алгебре, остальные по тригонометрии. Найдите вероятность, что ученику попадётся билет по геометрии или по алгебре.
3. Игральный кубик брошен один раз. Найдите вероятность выпадения числа, кратного 2 или кратного 3.
4. В лотерее 100 билетов, из них 10 выигрышных. Какова вероятность, что первый купленный билет окажется выигрышным?
5. В корзине 6 яблок и 4 груши. Наугад берут один фрукт. Найдите вероятность, что это яблоко или груша?
6. Из колоды в 36 карт наугад вынимают одну. Найдите вероятность, что это будет туз или король.

Тема 3.7. Правило умножения вероятностей

Теория

Для независимых событий (наступление одного не влияет на наступление другого) вероятность совместного наступления равна произведению вероятностей:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Пример: Монета подбрасывается два раза. Какова вероятность, что оба раза выпадет орёл?

- $P(\text{орёл}) = 1/2$, события независимы.
- $P(\text{орёл и орёл}) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$.

Пример: Вероятность попадания в цель у первого стрелка 0,8, у второго - 0,7. Найти вероятность, что оба попадут.

- $P = 0,8 \cdot 0,7 = 0,56$.

Практические задания

1. Монету подбрасывают дважды. Найдите вероятность, что оба раза выпадет решка.
2. Игральный кубик бросают дважды. Найдите вероятность, что первый раз выпадет 6, а второй - нечётное число.
3. Вероятность того, что новый тостер прослужит больше года, равна 0,9. Вероятность, что он прослужит больше двух лет, равна 0,7. Найдите вероятность, что он прослужит больше двух лет при условии, что он прослужил больше года (это условная вероятность, но на базе могут дать просто независимые события).
4. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания первого - 0,6, второго - 0,5. Найдите вероятность, что оба промахнутся (сначала найти вероятность промаха каждого: 0,4 и 0,5, затем перемножить).
5. В корзине 5 красных и 3 синих шара. Вынимают шар, запоминают цвет и возвращают обратно (с возвращением). Затем снова вынимают. Найдите вероятность, что оба шара красные.
6. Монета брошена 3 раза. Найдите вероятность, что все три раза выпадет орёл.

Тема 3.8. Вероятность противоположного события и комбинированные задачи

Теория

Вероятность противоположного события $\bar{A}$ (событие не наступило) равна:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Это удобно, когда легче найти вероятность того, что событие не произойдёт.

Комбинированные задачи могут использовать и сложение, и умножение.

Пример: В ящике 10 деталей, 3 бракованных. Наугад берут 2 детали (без возвращения). Найти вероятность, что хотя бы одна бракованная.

- Решение через противоположное событие: «обе детали бракованные» - но проще через «ни одна не бракованная». Вероятность, что первая не бракованная: $7/10$, вторая не бракованная (без возвращения): $6/9$.

Тогда $P(\text{ни одна не бракованная}) = 7/10 \cdot 6/9 = 42/90 = 7/15$.

Тогда $P(\text{хотя бы одна бракованная}) = 1 - 7/15 = 8/15$.

Пример (из варианта): Вероятность, что хотя бы один автомат исправен, если каждый может быть неисправен с вероятностью 0,05 независимо.

- $P(\text{оба неисправны}) = 0,05 \cdot 0,05 = 0,0025$.
- $P(\text{хотя бы один исправен}) = 1 - 0,0025 = 0,9975$.

Практические задания

1. Вероятность того, что случайно выбранный билет окажется выигрышным, равна 0,2. Найдите вероятность, что билет не выигрышный.
2. Стрелок попадает в цель с вероятностью 0,7. Найдите вероятность промаха.

3. Два автомата работают независимо. Вероятность, что первый сломается, равна 0,05, второй - 0,04. Найдите вероятность, что хотя бы один автомат сломается.
4. В группе 15 студентов, из них 5 отличников. Случайно выбирают двух студентов (без возвращения). Найдите вероятность, что хотя бы один из них отличник.
5. В урне 4 белых и 6 чёрных шаров. Вынимают два шара без возвращения. Найдите вероятность, что они оба чёрные. Затем найдите вероятность, что хотя бы один белый.
6. Вероятность попадания в цель у первого стрелка 0,8, у второго - 0,6. Оба стреляют по одному разу. Найдите вероятность, что цель будет поражена (хотя бы одним).

Тема 3.9. Степени с рациональными показателями

Теория

В задании №16 ЕГЭ базового уровня проверяется умение преобразовывать выражения, содержащие степени с рациональными (дробными) показателями. Рациональный показатель позволяет записать корень в виде степени и наоборот, что упрощает вычисления.

Определение:

Для любого $a > 0$, целого m и натурального n ($n \geq 2$) выполняется:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

При этом, если n нечётное, определение можно расширить и на отрицательные a , но в рамках ЕГЭ обычно рассматриваются положительные основания.

Основные свойства степеней (для любых рациональных r, s и $a > 0, b > 0$):

1. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ - умножение степеней с одинаковым основанием.
2. $a^r : a^s = a^{r-s}$ - деление степеней с одинаковым основанием.
3. $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$ - возведение степени в степень.
4. $(ab)^r = a^r b^r$ - степень произведения.
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$ - степень частного.
6. $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$ - отрицательный показатель (обратное число).
7. $a^0 = 1$ (при $a \neq 0$).

Важно: для перехода от корня к степени и обратно полезно запомнить:

- $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$
- $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$
- $\frac{1}{\sqrt[n]{a}} = a^{-1/n}$

Примеры вычислений

Пример 1. Вычислить $27^{2/3}$.

Решение:

$$27 = 3^3, \text{ тогда } 27^{2/3} = (3^3)^{2/3} = 3^{3 \cdot \frac{2}{3}} = 3^2 = 9.$$

Пример 2. Вычислить $16^{-3/4}$.

Решение:

$$16 = 2^4, \text{ тогда } 16^{-3/4} = (2^4)^{-3/4} = 2^{4 \cdot (-\frac{3}{4})} = 2^{-3} = \frac{1}{8}.$$

Пример 3. Упростить $\sqrt[3]{64^2}$.

Решение:

$$\sqrt[3]{64^2} = 64^{2/3}. \text{ Так как } 64 = 4^3, \text{ то } (4^3)^{2/3} = 4^{3 \cdot \frac{2}{3}} = 4^2 = 16.$$

Пример 4. Вычислить $\left(\frac{1}{9}\right)^{-1/2}$.

Решение:

$$\frac{1}{9} = 9^{-1}, \text{ тогда } (9^{-1})^{-1/2} = 9^{(-1) \cdot (-\frac{1}{2})} = 9^{1/2} = \sqrt{9} = 3.$$

Перевод корней в степени и обратно

Корень	Степень
$\sqrt{a}$	$a^{1/2}$
$\sqrt[3]{a}$	$a^{1/3}$
$\sqrt[4]{a^3}$	$a^{3/4}$
$\frac{1}{\sqrt[5]{a^2}}$	$a^{-2/5}$

Практические задания

1. Найдите значение выражения $27^{2/3}$.
2. Найдите значение выражения $8^{-2/3}$.
3. Вычислите $16^{3/4}$.
4. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{125^2}$.
5. Представьте в виде степени с рациональным показателем: $\sqrt[5]{a^2}$.
6. Найдите значение выражения $(0,01)^{-1/2}$.
7. Вычислите $\left(\frac{1}{9}\right)^{-1/2}$.

Тема 3.10. Преобразования выражений со степенями и корнями (включая простейшую тригонометрию)

Теория

В задании №16 ЕГЭ базового уровня проверяется умение преобразовывать выражения, содержащие степени, корни, логарифмы и значения тригонометрических функций для табличных углов. Для успешного решения необходимо знать свойства степеней, корней, логарифмов и табличные значения синуса, косинуса, тангенса для углов 0° , 30° , 45° , 60° , 90° , 180° , 270° , 360° .

1. Преобразования выражений со степенями

Основные свойства степеней:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $a^m : a^n = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $(ab)^n = a^n b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a^0 = 1$, $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$

Важно: при преобразованиях часто нужно привести все числа к одинаковому основанию (например, $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $27 = 3^3$, $16 = 2^4$, $64 = 2^6$, $81 = 3^4$).

Пример:

Найдите значение выражения $\frac{12^{12}}{2^{14} \cdot 6^{11}}$.

$$12 = 2^2 \cdot 3, 6 = 2 \cdot 3.$$

Тогда:

$$\frac{(2^2 \cdot 3)^{12}}{2^{14} \cdot (2 \cdot 3)^{11}} = \frac{2^{24} 3^{12}}{2^{14} \cdot 2^{11} 3^{11}} = \frac{2^{24} 3^{12}}{2^{25} 3^{11}} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

2. Преобразования выражений с корнями

Основные свойства корней (для $a, b \geq 0$):

- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$
- $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$
- $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$

Пример:

Найдите значение выражения $(\sqrt{63} - \sqrt{7}) \cdot \sqrt{7}$.

$$\sqrt{63} \cdot \sqrt{7} - \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{63 \cdot 7} - 7 = \sqrt{441} - 7 = 21 - 7 = 14.$$

3. Преобразования выражений с логарифмами

Основные свойства логарифмов ($a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$):

- $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$
- $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
- $\log_a(b^k) = k \cdot \log_a b$
- $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$

Пример:

Найдите значение выражения $\log_6 1,5 + \log_6 24$.

$$\log_6(1,5 \cdot 24) = \log_6 36 = 2, \text{ так как } 36 = 6^2.$$

4. Простейшие тригонометрические преобразования

Табличные значения (наиболее частые):

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \sin 90^\circ = 1, \cos 90^\circ = 0, \sin 180^\circ = 0, \cos 180^\circ = -1, \sin 270^\circ = -1, \cos 270^\circ = 0.$$

Периодичность:

$$\sin(\alpha + 360^\circ k) = \sin \alpha, \cos(\alpha + 360^\circ k) = \cos \alpha.$$

Пример:

Найдите значение выражения $26 \sin 750^\circ$.

$$750^\circ = 720^\circ + 30^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 30^\circ, \text{ значит } \sin 750^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Тогда } 26 \cdot \frac{1}{2} = 13.$$

Дополнительный пример:

$$\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (формула приведения } \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha).$$

5. Комбинированные выражения

В одном задании могут сочетаться степени, корни, логарифмы и тригонометрия. Решаются последовательным применением соответствующих правил.

Пример:

$$\log_2 8 + \sqrt{25} - 2 \sin 30^\circ = 3 + 5 - 2 \cdot 0,5 = 8 - 1 = 7.$$

Общие рекомендации:

- Упрощайте каждый компонент по отдельности.
- Соблюдайте порядок действий: скобки, степени/корни, умножение/деление, сложение/вычитание.
- Для логарифмов проверяйте, что аргумент и основание определены (аргумент > 0 , основание $> 0, \neq 1$).
- Для корней чётной степени подкоренное выражение должно быть неотрицательным.

Практические задания

1. Найдите значение выражения $(\sqrt{63} - \sqrt{7}) \cdot \sqrt{7}$.
2. Найдите значение выражения $\log_6 1,5 + \log_6 24$.
3. Найдите значение выражения $26 \sin 750^\circ$.
4. Найдите значение выражения $\frac{12^{12}}{2^{14} \cdot 6^{11}}$.
5. Упростите: $\sqrt{75} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{25}$.
6. Вычислите: $\cos 180^\circ + \sin 270^\circ$.
7. Найдите значение выражения $3^{-2} \cdot 27^{1/3}$.
8. Вычислите: $\log_3 9 + \log_3 27$.

Тема 3.11. Задачи на смекалку (числовые и логические)

Теория

Задания №19 и №21 ЕГЭ базового уровня содержат нестандартные задачи на подбор чисел, использование признаков делимости, логические рассуждения. Важно уметь

систематически перебирать варианты, составлять уравнения, использовать свойства чисел.

Основные приёмы:

- Признаки делимости (на 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 22, 25, 125).
- Составление уравнений на основе условий.
- Перебор возможных вариантов с ограничениями.
- Использование свойств чётности/нечётности, кратности.

Пример 1 (из варианта, задание 19): Найдите трёхзначное натуральное число, которое при делении и на 4, и на 5, и на 6 даёт в остатке 2 и цифры в записи которого чётные.

- Число должно давать остаток 2 при делении на 4, 5, 6. Это значит, что число N удовлетворяет: $N - 2$ делится на 4, 5, 6. Значит, $N - 2$ делится на $\text{НОК}(4,5,6) = 60$. Тогда $N = 60k + 2$. Трёхзначное: $100 \leq 60k + 2 \leq 999 \rightarrow k$ от 2 до 16. Цифры все чётные: это могут быть только 0,2,4,6,8. Первая цифра не может быть 0. Проверяем k и смотрим, чтобы цифры были чётные. Например, при $k = 4$, $N = 242$, цифры 2,4,2 - чётные, подходит. Ответ: 242.

Пример 2 (из варианта, задание 21 - викторина): Список из 33 вопросов. За правильный ответ +7, за неправильный -13, за отсутствие 0. Ученик набрал 56, известно, что хотя бы раз ошибся. Найти число верных ответов.

- Пусть x - верных, y - неверных, z - без ответа. $x + y + z = 33$, $7x - 13y = 56$. Решаем уравнение в целых неотрицательных числах: $7x - 13y = 56$. Выразим $x = (56 + 13y)/7$. y должно давать такой остаток, чтобы числитель делился на 7. Перебираем: $y = 0 \rightarrow x = 8$, но тогда $z = 33 - 8 = 25$, подходит, но условие «хотя бы раз ошибся» означает $y > 0$. $y = 1 \rightarrow x = (56 + 13)/7 = 69/7$, не целое. $y = 2 \rightarrow 56 + 26 = 82/7$ не целое. $y = 3 \rightarrow 56 + 39 = 95/7$ не целое. $y = 4 \rightarrow 56 + 52 = 108/7$ не целое. $y = 5 \rightarrow 56 + 65 = 121/7$ не целое. $y = 6 \rightarrow 56 + 78 = 134/7$ не целое. $y = 7 \rightarrow 56 + 91 = 147/7 = 21$, $x = 21$, тогда $z = 33 - 21 - 7 = 5$. Ответ: 21.

Пример 3 (задание 19 - четырёхзначное число, кратное 125, все цифры различны и нечётны): Число кратно 125, значит, оканчивается на 000, 125, 250, 375, 500, 625, 750, 875. Но цифры должны быть нечётными и различными, поэтому последние три цифры могут быть 125, 375, 875 (так как 125 - все нечётные, 375 - все нечётные, 875 - все нечётные). Также первая цифра должна быть нечётной и отличной от остальных. Можно перебрать: например, 3125 (3,1,2,5 - но 2 чётная, не подходит). 5125 - 5 повторяется, не подходит. 7125 - 7,1,2,5 - 2 чётная, нет. 9125 - 9,1,2,5 - 2 чётная. Ищем с 375: 1375 - 1,3,7,5 - все нечётные, различны, число 1375 кратно 125? $125 \cdot 11 = 1375$. Да, подходит. Ответ: 1375.

Практические задания

1. Найдите трёхзначное натуральное число, которое при делении и на 4, и на 5, и на 6 даёт в остатке 2 и цифры в записи которого чётные.
2. На шести карточках написаны цифры 2, 3, 5, 6, 7, 7. В выражении $\square + \square\square + \square\square\square$ вместо каждого квадратика положили карточку. Оказалось, что полученная

сумма делится на 10, но не делится на 20. В ответе укажите какую-нибудь одну такую сумму.

3. Найдите четырёхзначное число, кратное 125, все цифры которого различны и нечётны.
4. Вычеркните в числе 45341527 три цифры так, чтобы получившееся число делилось на 22. В ответе укажите какое-нибудь одно получившееся число.
5. Список заданий викторины состоял из 33 вопросов. За каждый правильный ответ ученик получал 7 очков, за неправильный ответ с него списывали 13 очков, а при отсутствии ответа давали 0 очков. Сколько верных ответов дал ученик, набравший 56 очков, если известно, что по крайней мере один раз он ошибся?
6. Прямоугольник разбит на четыре меньших прямоугольника двумя разрезами. Периметры трёх из них, начиная с левого верхнего и далее по часовой стрелке, равны 24, 28 и 16. Найдите периметр четвёртого.
7. В доме 19 квартир. В каждой живёт от 1 до 3 человек. В квартирах с 1-й по 12-ю живёт 16 человек, а с 9-й по 19-ю - 29 человек. Сколько всего человек живёт в доме?
8. В таблице три столбца и несколько строк. Суммы в столбцах равны 137, 160, 185. Сумма в каждой строке больше 24, но меньше 27. Сколько строк в таблице?